1. $x = 4 - \sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 8x + 15$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x = 4 - \sqrt{3}$ 에서 $x - 4 = -\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면, $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 = 3$ 이므로

$x^2 - 8x = -13$

$\therefore\ x^2 - 8x + 15 = -13 + 15 = 2$

2. 다음 무리함수 중 함수 $y = \sqrt{-x}$을 평행이동하여 얻을 수 없는 것을 고르면?

① $y = \sqrt{-x+2}$

② $y = \sqrt{-(x+1)} + 3$

③ $y = \sqrt{3-x}$

④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{-x} - 1$

해설

$y = \sqrt{-x}$에서 x 앞의 부호가 반대일 경우 평행이동하여 얻을 수 없다.

3. 함수 $f(x) = \sqrt{2x-4}$ 에 대하여 $(f \circ f)(52)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$f(52) = \sqrt{2 \cdot 52 - 4} = 10$

$\therefore \ (f \circ f)(52) = f(10) = \sqrt{2 \cdot 10 - 4} = 4$

4. 크고 작은 두 개의 주사위 A, B 를 동시에 던질 때, 다음 각각을 차례대로 구하여라.

(1) 나오는 눈은 모두 몇 가지인가?

(2) 두 개의 눈이 서로 다른 경우는 몇 가지인가?

▶ 답 : ______ 가지

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 36 가지

▷ 정답 : 30 가지

해설

(1) A 에서 6 가지, B 에서 6 가지가 나오므로 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ (가지)

(2) 눈이 서로 다른 경우는 A 의 6 가지 각각에 대하여 B 에서 5 가지가 나오므로 $6 \times 5 = 30$ (가지)

5. 72 의 양의 약수의 개수는?

① 6 ② 8 ③ 9 ④ 12 ⑤ 16

해설

72를 소인수 분해하면 $72 = 2^3 \times 3^2$
2^3 의 약수는 2^0, 2^1, 2^2, 2^3,
3^2 의 약수는 3^0, 3^1, 3^2
그런데 72 의 양의 약수는 $2^x \times 3^y$ 의 꼴이 되므로
$0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2$
따라서 x, y가 되는 정수의 개수는 각각 $4, 3$ 이므로
구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$4 \times 3 = 12$(개)

6. ${}_nP_n = 24$ 일 때, 자연수 n 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

${}_nP_n = n!$

$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 이므로

$n = 4$

7. 6개의 전시관으로 구성된 박물관에서 전시관을 관람하는 순서를 정하는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 720

해설

$_6P_6 = 6! = 720$

8. 알파벳 a, b, c, d, e, f 가 각각 적힌 여섯 장의 카드가 있다. 이 중 두 장을 뽑아 만들 수 있는 단어의 수를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 30

해설

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

9. 함수 $y = \dfrac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \dfrac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$y = \dfrac{x+3}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}$

$y = \dfrac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3,\ n = 1$

$m + n = 4$

10. 함수 $y=\dfrac{2+x}{1-2x}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a, y=b$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$y=\frac{x+2}{-2x+1}$$

$$=\frac{x+2}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$

11. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 에서 $y(x-1)=ax+1$

$yx-y=ax+1,\ yx-ax=1+y$

$x(y-a)=1+y,\ x=\dfrac{1+y}{y-a}$

$\therefore\ y^{-1}=\dfrac{x+1}{x-a}$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$\dfrac{x+1}{x-a}=\dfrac{ax+1}{x-1}$

$\therefore a=1$

12. 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오거나 소수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 5 가지

해설

짝수의 눈 : $2, 4, 6$ (3 가지)
소수의 눈 : $2, 3, 5$ (3 가지)
짝수이면서 소수인 눈 : 2 (1 가지)
따라서 짝수 또는 소수의 눈이 나오는 경우의 수는
$3 + 3 - 1 = 5$ 이다.
$\therefore 5$ 가지

13. $\dfrac{{}_nP_3}{{}_{n+2}P_3} = \dfrac{5}{12}$ 일 때 n 값을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\frac{{}_nP_3}{{}_{n+2}P_3} = \frac{\dfrac{n!}{(n-3)!}}{\dfrac{(n+2)!}{(n+2-3)!}}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{12}$$

$\dfrac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{5}{12}$ 을 풀면

$7n^2 - 51n + 14 = 0$

$(7n-2)(n-7) = 0$

$\therefore n = \dfrac{2}{7}$ 또는 $n = 7$

${}_nP_3$ 에서 n은 3 이상의 자연수이므로

$\therefore n = 7$

14. 6 개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 배열할 때, 모음 a, e가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ **답 :** ________ 가지

▷ **정답 :** 480 가지

해설

a, e 를 제외한 나머지 b, c, d, f 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.
이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 a, e를 늘어 놓으면, a, e는 이웃할 수 없다.
즉, $\square\, b\, \square\, c\, \square\, d\, \square\, f\, \square$의 다섯 개의 $\square$중에 두 개를 골라 a, e 를 배열한다.
따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

15. A, C, E, F, L, O, S, V 의 8 개의 문자를 일렬로 나열할 때, 문자열 속에 $ASLOVECF$ 와 같이 $LOVE$ 라는 단어가 들어 있는 경우의 수는?

① 80 ② 100 ③ 120 ④ 140 ⑤ 160

해설

$LOVE$ 를 한 문자 X 로 생각하면 되므로, 구하는 경우의 수는 X, A, C, F, S 의 5 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore 5! = 120$ (가지)

16. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 15x + k = 0$ 의 두 근이 ${}_nC_1$, ${}_nC_2$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 14 ② 26 ③ 36 ④ 44 ⑤ 50

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

${}_nC_1 +_n C_2 = 15$

$n^2 + n - 30 = 0,\ (n+6)(n-5) = 0$

$n > 0$ 이므로 $n = 5$

따라서, 두 근은 ${}_5C_1 = 5,\ {}_5C_2 = 10$ 이므로

$k = 5 \cdot 10 = 50$

17. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$에서 X에서 Y로의 일대일함수의 갯수는?

① 12개 ② 24개 ③ 28개 ④ 32개 ⑤ 36개

해설

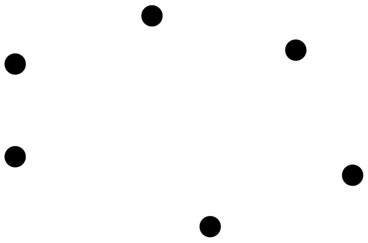
집합 Y의 원소 $4, 5, 6, 7$에서 서로 다른 세 개를 뽑아

$1 \rightarrow \square,\ 2 \rightarrow \square,\ 3 \rightarrow \square$

의 □ 안에 늘어놓는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

18. 다음 그림과 같이 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 6개의 점에 대하여 만들어지는 직선의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

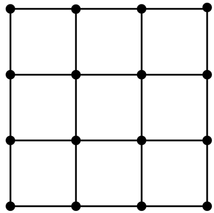
▷ 정답 : 15 개

해설

두 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수는

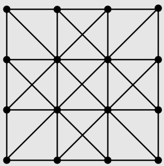
$$_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ (개)}$$

19. 그림과 같이 9 개의 정사각형의 꼭짓점 위에 16 개의 점이 있다. 이 중에서 세 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



① 236 ② 338 ③ 400 ④ 442 ⑤ 516

해설



세 점을 뽑을 수 있는 모든 방법의 수는
${}_{16}C_3 \times = 560$ (가지)
4 점이 일직선 위에 있는 경우가 10 가지,
3 점이 일직선 위에 있는 경우가 4 가지
있으므로, 일직선 위의 세 점을 선택하는 경우의 수는
${}_{4}C_3 \times 10 + {}_{3}C_3 \times 4 = 44$
따라서, 구하는 삼각형의 수는 $560 - 44 = 516$ (개)

20. 15 명의 학생을 4 명, 5 명, 6 명의 3 조로 나누는 모든 방법의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 630630 가지

해설

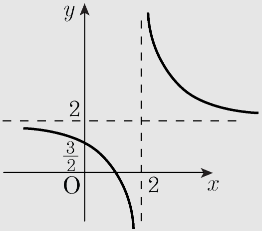
$_{15}C_4 \times_{11} C_5 \times_6 C_6 = 630630$

21. 분수함수 $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\left\{y \mid \dfrac{3}{2} < y < 2\right\}$
② $\left\{y \mid \dfrac{3}{2} \leq y < 2\right\}$
③ $\left\{y \mid y \leq \dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$
④ $\left\{y \mid y \leq -\dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$
⑤ $\left\{y \mid y \leq \dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$

해설

$$y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$



$x = 0$ 일 때, $y = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ 이므로,

치역은 $\left\{y \mid y \leq \dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$

22. $x \geq 1$이고 $a = \dfrac{2x}{x^2+1}$일 때, $f(x) = \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$

$$= \sqrt{1+\frac{2x}{x^2+1}} - \sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\because\ x \geq 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$에서 $x=1$일 때

최댓값 $f(1) = \sqrt{2}$

23. $x = \sqrt{7-\sqrt{48}}$ 일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ 의 값을 구하면?

① 36　　② 98　　③ 448　　④ 724　　⑤ 1024

해설

$$x = \sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$
$$= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$
$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2-\sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$
$$= 2-\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$
$$x^2 + \frac{1}{x}^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$
$$x^3 + \frac{1}{x}^3 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$= 64 - 12 = 52$$

따라서, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$

$$= \left(x^2+\frac{1}{x}^2\right)\left(x^3+\frac{1}{x}^3\right) - \left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$= 14 \times 52 - 4 = 724$$

24. x, y가 유리수일 때, $[x,\ y] = \sqrt{2}x + y$로 정의하자. 유리수 a, b가 $[2a,\ 2b] + 1 = [b,\ a] - 2$를 만족할 때, $a + b$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$[2a,\ 2b] + 1 = \sqrt{2}(2a) + 2b + 1$

$[b,\ a] - 2 = \sqrt{2}b + a - 2$

$\therefore\ (2b + 1) + 2a\sqrt{2} = (a - 2) + b\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2b + 1 = a - 2 \\ 2a = b \end{cases}$ 에서

$a = -1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = -1 - 2 = -3$

25. p, o, w, e, r 의 5 개 문자를 일렬로 배열할 때, p, o, w 중 적어도 2 개가 이웃하는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 108 가지

해설

5 개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$

p, o, w 중 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수는

p, o, w 를 일렬로 배열하고 그 사이사이에 e, r 이 오도록 배열하는 경우의 수와 같으므로

$3! \times 2 = 6 \times 2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는 $120 - 12 = 108$