**1.** 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2$, $B = 3x^2 - 2x + 1$, $C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

**2.** 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a+2b) + (2a+3b) & \\ &= (2a+4b) + (2a+3b) & \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b+2a) + 3b & \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a+4b) + 3b & \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a+2a) + (4b+3b) & \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2+2)a + (4+3)b & \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b & \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a+4b) + 3b = (2a+2a) + (4b+3b)$: 결합법칙

**3.** 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$　　② $-r(x)$　　③ $0$

④ $r(x)$　　⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$

$\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$

$= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$

$= g(x)\left\{Q(x) - 1\right\} - r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

**4.** $x$ 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $ab$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$

$A = (x + p)$

$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$

$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$

우변을 정리하면

$\therefore \ a = -2,\ b = 3$

$\therefore ab = -6$

**5.** 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 $B$ 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$ , 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$
좌변을 $2x - 1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

**6.** 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $$\begin{aligned}(a^2+a+1)(a^2-a+1) &= (a^2+1)^2-a^2\\ &= a^4+a^2+1\end{aligned}$$

**7.** 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 $x^3$ 의 계수를 각각 $a$, $b$라 할 때, $a-b$의 값은?

① $4^3-5^3$ ② $3^3-3^4$ ③ 0
④ 1 ⑤ $-1$

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$
$=(A+x^4)^3$
$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$
$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 $x^3$ 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 $x^3$ 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

**8.** 세 실수 $a, b, c$ 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

**9.** $x^2-x+1=0$ 일 때, $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$x^2-x+1=0$, 양변에 $x+1$을 곱하면,
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
$x^3+1=0$, $x^3=-1$ 에서 $x^5=x^3\times x^2=-x^2$
$x^5+\dfrac{1}{x^5}=-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\cdots$①
$x^2-x+1=0$를 $x$로 나누어 정리한다.
$x+\dfrac{1}{x}=1$
$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=-1$
① 에 대입하면, $x^5+\dfrac{1}{x^5}=1$

**10.** 상수 $a, b$에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a+b$의 값은?

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$을 곱하면,
$a(x+3)+b(x-1)=6(x+1)$
$(a+b)x+(3a-b)=6x+6$
$\therefore\ a+b=6,\ 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
$a=3,\ b=6-a=3$
$\therefore\ 2a+b=2\times3+3=9$

**11.** 임의의 실수 $x$에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-30$

해설

$(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
양변에 $x=2,-2,1$을 각각 대입하면
$0=1+a+b+c,\ 0=-27+9a-3b+c,\ -9=c$
세 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=3,\ c=-9$
$\therefore\ a(b+c)=5\times(3-9)=-30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.
$(x-2)(x+2)^2$
$=x^3+2x^2-4x-8$
$=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 & & \\
 & & 1 & 3 & -1 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{b} & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow \mathrm{a} & & &
\end{array}$$

$\therefore\ a(b+c)=5(3-9)=-30$

**12.** $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 $x$에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서
$(2-4k)x+3a-k=0$
이 식은 $x$에 대한 항등식이므로,
$2-4k=0,\ 3a-k=0$
$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$
$\therefore\ 12a=2$

**13.** $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 $x,\ y$의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-4$

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

$x,\ y$에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 $x,\ y$에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

**14.** 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 $f(x)$를 $\frac{g(x)}{n}$로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$
② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$
④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots$ ㉠

$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots$ ㉡

㉠ 에서 $f(x) = nQ(x)\frac{g(x)}{n} + R(x)$,

$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x),\ R'(x) = R(x)$

$\therefore\ Q'(x) = n \cdot Q(x),\ R'(x) = R(x)$

**15.** $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ 가 항등식일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 & & -1 & 2 & -2 \\
\hline
-1 & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 3 & \\
\hline
-1 & 1 & -3 & \boxed{5} & \\
 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-4} & & 
\end{array}
$$

$\therefore\ a = -4,\ b = 5,\ c = 0$

$\therefore\ a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore\ a + b + c = 1$

**16.** 두 다항식 $f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$에서
$f(-2)=g(-2)$이므로
$4-6+a=-8-2a$
$\therefore\ a=-2$

**17.** 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 $-1$일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 $x^2-1$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$
$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$x=1, x=-1$ 을 대입한다.
$4f(1)=12=a+b\cdots㉠$
$2f(-1)=-2=-a+b\cdots㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면,
$a=7,\ b=5$
$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$
$R(1)=12$

**18.** 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b(a \neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$이라 할 때,
$xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지를 구하면?

① $R$　② $aR$　③ $bR$　④ $-\frac{b}{a}R$　⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R \quad \therefore \; R=f(-\frac{b}{a})$

$g(x)=xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는

$g(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}R$

**19.** 다항식 $x^3+ax^2+bx+c$ 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, $x^2-1$로 나누면 떨어진다. 이 때, $abc$의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_1(x)+3$$
$$=(x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$f(-2)=3$ $f(1)=0$ $f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore\ abc=9$

**20.** $x$에 대한 다항식 $x^3+ax^2-x+b$를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & a & -1 & b \\
 &  & c & d & a \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \boxed{5}
\end{array}
$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=1$

④ $d=4$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 $x^3+ax^2-x+b$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & a & -1 & b \\
 &  & 1 & a+1 & a \\
\hline
 & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a}
\end{array}
$$

$k=1$, $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

**21.** $x$ 에 관한 항등식$x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 를 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① $-10$  ② $10$  ③ $50$  ④ $100$  ⑤ $200$

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
따라서 $x^3+2x^2-3x+5$ 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막의 몫이 $a$ 이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$
$\therefore\ abcd=100$

**22.** 100개의 다항식 $x^2-x-1$ , $x^2-x-2$ , $\cdots$ , $x^2-x-100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개 ② 7개 ③ 9개 ④ 11개 ⑤ 13개

해설

$x^2-x-n=(x+a)(x-b)$ ($a,\ b$ 는 자연수)라 하면
$b=a+1$ , $ab=n$ $(1 \le n \le 100)$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $b$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $n=ab$ | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 | 90 |

$\therefore$ 9(개)

**23.** 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$ ② $-x - y$ ③ $x + y - 2$
④ $x - y$ ⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y)\\ &= (x + y)^2 - 2(x + y)\\ &= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2)\\ &= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

**24.** $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

**25.** $x^4 + 4y^4$ 의 인수인 것은?

① $x^2 + y^2$ ② $x^2 + 2y^2$ ③ $x^2 + xy + 2y^2$
④ $x^2 - xy + 2y^2$ ⑤ $x^2 + 2xy + 2y^2$

해설

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2) \end{aligned}$$

**26.** 다항식 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$를 인수분해 한 식은?

① $(2x - y - 2)(x + y - 1)$　　② $(2x + y + 2)(x - y + 1)$

③ $(2x - y - 2)(x - y - 1)$　　④ $(2x + y - 2)(x + y - 1)$

⑤ $(2x + y - 2)(x - y - 1)$

**해설**

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= 2x^2 - (y+4)x - (y^2 - y - 2) \\
&= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2) \\
&= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\} \\
&= (2x + y - 2)(x - y - 1)
\end{aligned}
$$

**27.** $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$라 하면
$f(1)=0, f(3)=0$이므로
$f(x)$는 $x-1, x+3$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$
$\quad=(x^2+1)(x+3)(x-1)$

**28.** $\dfrac{2002^3-1}{2002\times2003+1}$ 의 값을 구하면?

① 1999　② 2000　③ 2001　④ 2002　⑤ 2003

해설

$a=2002$로 치환하면

$\dfrac{a^3-1}{a(a+1)+1}=\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=a-1$

$\therefore\ 2002-1=2001$

**29.** $x^2 = 3-\sqrt{2}$일 때, $\dfrac{x^5 - x^4 - 3x + 3}{x-1}$의 값은?

① $8-6\sqrt{2}$　② $8-4\sqrt{2}$　③ $5-6\sqrt{2}$
④ $5-4\sqrt{2}$　⑤ $3-6\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^4-3x+3}{x-1} &= \frac{x^4(x-1)-3(x-1)}{x-1}\\ &= \frac{(x^4-3)(x-1)}{x-1}\\ &= x^4-3\\ &= (3-\sqrt{2})^2-3\\ &= 11-6\sqrt{2}-3 = 8-6\sqrt{2}\end{aligned}$$

**30.** 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. $(a, b, c, d$는 상수$)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2$

$= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2$

$= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

**31.** 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$(x-1)\left(3x^2 + ax + 2a\right)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2 + ax + 2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$
$\therefore a = -3$

**32.** $x$에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $pq$의 값을 구하면?

① $-2$　　② $-1$　　③ $0$　　④ $1$　　⑤ $2$

해설

$f(x) = x^3 + px^2 - q^2$,
$q(x) = x^3 - (3q-p)x + 2(q-1)$라 놓으면
최대공약수가 $x-1$이므로
$f(1) = 1 + p - q^2 = 0 \cdots$ ㉠
$g(1) = 1 - (3q-p) + 2(q-1) = 0$에서
$p - q - 1 = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $q^2 - q - 2 = 0$, $(q-2)(q+1) = 0$
( i ) $q = 2$일 때, ㉡ $p = 3$
$f(x) = (x-1)(x+2)^2$, $g(x) = (x-1)^2(x+2)$
$\therefore$ $G.C.D$가 $x-1$이라는 것에 모순
( ii ) $q = -1$일 때, ㉡ $p = 0$
$f(x) = (x-1)(x^2+x+1)$,
$g(x) = (x-1)(x^2+x+4)$
$\therefore$ $G.C.D$는 $x-1$
$\therefore$ $pq = 0$

**33.** 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 $x^3-kx+6$일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-3x-5$ ② $2x^2-3x+1$ ③ $2x^2-x-1$
④ $2x^2+x-3$ ⑤ $2x^2+2x-4$

해설

최소공배수는 최대공약수를 인수로 가지므로
$x=1$일 때 $1-k+6=0$ $\therefore k=7$
$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$이므로
두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-x-1$

**34.** 두 다항식 $A, B$의 최대공약수가 $x+1$이고, 곱이 $x^4+x^3-7x^2-13x-6$이다. $A, B$의 최소공배수를 $f(x)$라 할 때, $f(3)$의 값은?

① $-3$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $4$

해설

$AB = LG,\ G = x+1$

$AB = x^4+x^3-7x^2-13x-6$

$\quad = (x+1)^2(x+2)(x-3)$

$f(x) = (x+1)(x+2)(x-3),\ f(3) = 0$

**35.** $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　② $2^{32}+1$　③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned} P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= \quad \vdots \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\ &= 2^{32}-1 \end{aligned}$$

**36.** $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$(준\ 식)=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2006$$

**37.** 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① $-3$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $0$ ⑤ $1$

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면
$x=-1$을 대입하면 $R=29$
$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$
$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$Q(1)$, $x=1$ 식에 대입
$31=2Q(1)+29$
$\therefore\ Q(1)=1$

**38.** $x^{30}$ 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$ 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합 (상수항 포함) 과 $R$ 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$ 을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$x=1$ 을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\dfrac{3^{30}-1}{2}$

$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\dfrac{3^{30}-1}{2}=\dfrac{3^{30}+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^{30}+1)$

**39.** 삼각형의 세변의 길이를 $x$, $y$, $z$라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① $x$가 빗변인 직각삼각형

② $y$가 빗변인 직각삼각형

③ $z$가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, $z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$
$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$
$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$
$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$
$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ $x$, $y$, $z$는 모두 양수)
$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

**40.** 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A$ 를 $B$ 로 나눈 나머지를 $R$ 라 하면 $A$ 와 $B$ 의 최대공약수는 $B$ 와 $R$ 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

> $A,\ B$ 의 최대공약수를 $G$ 라 하면,
> $A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소) 로 나타낼 수 있다.
> $A$ 를 $B$ 로 나눈 몫을 $Q$ 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, $G$ 는 $B$ 와 $R$ 의 ( 가 ) 이다.
> 한편, $b$ 와 $a - bQ$ 가 ( 나 ) 가 아니라면
> ( 가 ) $m$ (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk,\ a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, $a$ 와 $b$ 의 ( 가 ) $m$ 이 존재하므로
> $a$ 와 $b$ 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 $b$ 와 $a - bQ$ 는 ( 나 ) 이다.
> $B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서
> $b$ 와 $a - bQ$ 가 ( 나 ) 이므로 $B$ 와 $R$ 의 최대공약수는 $A$ 와 $B$ 의 최대공약수 $G$ 와 같다.

(　) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수　　② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수　　④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

**해설**

$A,\ B$ 의 최대공약수를 $G$ 라 하면
$A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소) 이고,
$A$ 를 $B$ 로 나눈 몫을 $Q$ 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, $G$ 는 $B$ 와 $R$ 의 공약수이다.
한편, $b$ 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 $m$ 이 존재하여
$b = mk,\ a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, $a$ 와 $b$ 의 공약수 $m$ 이 존재하므로 $a$ 와 $b$ 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 $b$ 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서 $a$ 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 $B$ 와 $R$ 의 최대공약수는 $A$ 와 $B$ 의 최대공약수와 같다.