1. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$$
$$= -2A + 5B - 4C$$
$$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$$
$$= -3x^2 - 24x + 21$$

2. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a+2b) + (2a+3b) \\ &= (2a+4b) + (2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b+2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a+4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a+2a) + (4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2+2)a + (4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

3. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0

④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

4. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\quad \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ \ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

5. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

6. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $$\begin{aligned}(a^2+a+1)(a^2-a+1) &= (a^2+1)^2-a^2\\ &= a^4+a^2+1\end{aligned}$$

7. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3 ② 3^3-3^4 ③ 0

④ 1 ⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

8. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=6,\ abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

9. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

① 에 대입하면, $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 1$

10. 상수 a, b에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a+b$의 값은?

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$을 곱하면,

$a(x+3)+b(x-1)=6(x+1)$

$(a+b)x+(3a-b)=6x+6$

$\therefore\ a+b=6,\ 3a-b=6$

두 식을 연립하여 풀면,

$a=3,\ b=6-a=3$

$\therefore\ 2a+b=2\times3+3=9$

11. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -30

해설

$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

양변에 $x = 2, -2, 1$을 각각 대입하면

$0 = 1 + a + b + c,\ 0 = -27 + 9a - 3b + c,\ -9 = c$

세 식을 연립하여 풀면 $a = 5,\ b = 3,\ c = -9$

$\therefore\ a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$(x-2)(x+2)^2$

$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$= (x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

$$
\begin{array}{c|cccc l}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 & \\
 & & 1 & 3 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} & \leftarrow \text{c} \\
 & & 1 & 4 & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & \text{b} \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow \text{a} & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a(b+c) = 5(3-9) = -30$

12. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

13. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1\neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

14. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 $f(x)$를 $\frac{g(x)}{n}$로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$
② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$
④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)\cdots$ ㉠

$f(x)=\frac{g(x)}{n}Q'(x)+R'(x)\cdots$ ㉡

㉠ 에서 $f(x)=nQ(x)\frac{g(x)}{n}+R(x)$,

$\frac{Q'(x)}{n}=Q(x),\ R'(x)=R(x)$

$\therefore\ Q'(x)=n\cdot Q(x),\ R'(x)=R(x)$

15. $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ 가 항등식일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 & & -1 & 2 & -2 \\ \hline
-1 & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 3 & \\ \hline
-1 & 1 & -3 & \boxed{5} & \\
 & & -1 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-4} & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a = -4,\ b = 5,\ c = 0$

$\therefore\ a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore\ a + b + c = 1$

16. 두 다항식 $f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a=-2$

해설

$f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$에서

$f(-2)=g(-2)$이므로

$4-6+a=-8-2a$

$\therefore\ a=-2$

17. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -1일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$

$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$x=1, x=-1$ 을 대입한다.

$4f(1)=12=a+b\cdots$㉠

$2f(-1)=-2=-a+b\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면,

$a=7,\ b=5$

$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$

$R(1)=12$

18. 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b(a \neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때,
$xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지를 구하면?

① R ② aR ③ bR ④ $-\frac{b}{a}R$ ⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$f(x) = (ax+b)Q(x) + R \quad \therefore \ R = f(-\frac{b}{a})$

$g(x) = xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는

$g(-\frac{b}{a}) = -\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a}) = -\frac{b}{a}R$

19. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, x^2-1로 나누면 떨어진다. 이 때, abc의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_1(x)+3$$
$$=(x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$f(-2)=3\quad f(1)=0\quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore\ abc=9$

20. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$

④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

21. x 에 관한 항등식 $x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 를 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
따라서 x^3+2x^2-3x+5 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$
$\therefore\ abcd=100$

22. 100개의 다항식 x^2-x-1, x^2-x-2, $\cdots$, $x^2-x-100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개 ② 7개 ③ 9개 ④ 11개 ⑤ 13개

해설

$x^2-x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면

$b=a+1$, $ab=n$ $(1 \le n \le 100)$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=ab$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$\therefore$ 9(개)

23. 다음 중 $x^2+y^2+2xy-2x-2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x+y$ ② $-x-y$ ③ $x+y-2$

④ $x-y$ ⑤ $2x+2y$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= (x^2+2xy+y^2)-2(x+y) \\
&= (x+y)^2-2(x+y) \\
&= (x+y)(x+y-2)
\end{aligned}
$$

한편,

$$
\begin{aligned}
(x+y)(x+y-2) &= -(-x-y)(x+y-2) \\
&= \frac{1}{2}(2x+2y)(x+y-2)
\end{aligned}
$$

24. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

25. x^4+4y^4 의 인수인 것은?

① x^2+y^2 ② x^2+2y^2 ③ $x^2+xy+2y^2$

④ $x^2-xy+2y^2$ ⑤ $x^2+2xy+2y^2$

해설

$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2 \\ &= (x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2) \end{aligned}$$

26. 다항식 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$를 인수분해 한 식은?

① $(2x - y - 2)(x + y - 1)$ ② $(2x + y + 2)(x - y + 1)$

③ $(2x - y - 2)(x - y - 1)$ ④ $(2x + y - 2)(x + y - 1)$

⑤ $(2x + y - 2)(x - y - 1)$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= 2x^2 - (y + 4)x - (y^2 - y - 2) \\
&= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2) \\
&= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\} \\
&= (2x + y - 2)(x - y - 1)
\end{aligned}
$$

27. $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$라 하면
$f(1)=0, f(3)=0$이므로
$f(x)$는 $x-1, x+3$로 나누어떨어진다.

$$\therefore\ f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$$
$$=(x^2+1)(x+3)(x-1)$$

28. $\dfrac{2002^3 - 1}{2002 \times 2003 + 1}$ 의 값을 구하면?

① 1999 ② 2000 ③ 2001 ④ 2002 ⑤ 2003

해설

$a = 2002$ 로 치환하면

$$\frac{a^3 - 1}{a(a+1)+1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1} = a - 1$$

$\therefore\ 2002 - 1 = 2001$

29. $x^2 = 3 - \sqrt{2}$ 일 때, $\dfrac{x^5 - x^4 - 3x + 3}{x - 1}$ 의 값은?

① $8 - 6\sqrt{2}$　　② $8 - 4\sqrt{2}$　　③ $5 - 6\sqrt{2}$

④ $5 - 4\sqrt{2}$　　⑤ $3 - 6\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^5 - x^4 - 3x + 3}{x - 1} &= \frac{x^4(x-1) - 3(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{(x^4 - 3)(x-1)}{x-1} \\ &= x^4 - 3 \\ &= (3 - \sqrt{2})^2 - 3 \\ &= 11 - 6\sqrt{2} - 3 = 8 - 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

30. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a+b+c+d = 4$

31. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$(x-1)\left(3x^2 + ax + 2a\right)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a = -3$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$

$\therefore 3x^2 + ax + 2a$는

$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$로 놓을 때

$x+2$가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.

$x+1$이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$

$\therefore a = -3$

32. x에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$의 최대공약수가 $x-1$일 때, pq의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^3+px^2-q^2$,

$q(x)=x^3-(3q-p)x+2(q-1)$라 놓으면

최대공약수가 $x-1$이므로

$f(1)=1+p-q^2=0\cdots$㉠

$g(1)=1-(3q-p)+2(q-1)=0$에서

$p-q-1=0\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $q^2-q-2=0$, $(q-2)(q+1)=0$

(i) $q=2$일 때, ㉡ $p=3$

$f(x)=(x-1)(x+2)^2$, $g(x)=(x-1)^2(x+2)$

$\therefore$ $G.C.D$가 $x-1$이라는 것에 모순

(ii) $q=-1$일 때, ㉡ $p=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$,

$g(x)=(x-1)(x^2+x+4)$

$\therefore$ $G.C.D$는 $x-1$

$\therefore$ $pq=0$

33. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-kx+6일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-3x-5$ ② $2x^2-3x+1$ ③ $2x^2-x-1$
④ $2x^2+x-3$ ⑤ $2x^2+2x-4$

해설

최소공배수는 최대공약수를 인수로 가지므로
$x=1$일 때 $1-k+6=0$ $\therefore k=7$
$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$이므로
두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-x-1$

34. 두 다항식 A, B의 최대공약수가 $x+1$이고, 곱이 $x^4+x^3-7x^2-13x-6$이다. A, B의 최소공배수를 $f(x)$라 할 때, $f(3)$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$AB = LG,\ \ G = x+1$$
$$\begin{aligned} AB &= x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6 \\ &= (x+1)^2(x+2)(x-3) \end{aligned}$$
$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-3),\ f(3) = 0$$

35. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned} P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= \quad \vdots \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\ &= 2^{32}-1 \end{aligned}$$

36. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

37. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면

$x=-1$을 대입하면 $R=29$

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x=1$식에 대입

$31=2Q(1)+29$

$\therefore\ Q(1)=1$

38. x^{30}을 $x-3$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$의 계수의 총합은 $Q(1)$과 같으므로

$x=1$을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$$\therefore\ Q(1)=\frac{3^{30}-1}{2}$$

$$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\frac{3^{30}-1}{2}=\frac{3^{30}+1}{2}=\frac{1}{2}(3^{30}+1)$$

39. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$

$= (x+y)(x^2+z^2-y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2+z^2-y^2)z = 0$

$x^2+z^2-y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)

$\therefore\ x^2+z^2=y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

40. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나눈 나머지를 R라 하면 A와 B의 최대공약수는 B와 R의 최대공약수와 같다.'를 보이는 과정이다.

> A, B의 최대공약수를 G라 하면,
> $A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b는 서로소)로 나타낼 수 있다.
> A를 B로 나눈 몫을 Q라 하면
> $A = BQ + R$에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G는 B와 R의 (가)이다.
> 한편, b와 $a - bQ$가 (나)가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식)이 존재하여
> $b = mk$, $a - bQ = mk'$이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a와 b의 (가) m이 존재하므로
> a와 b가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b와 $a - bQ$는 (나)이다.
> $B = Gb$, $R = G(a - bQ)$에서
> b와 $a - bQ$가 (나)이므로 B와 R의 최대공약수는 A와 B의 최대공약수 G와 같다.

(　)안의 (가), (나)에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수　② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수　④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B의 최대공약수를 G라 하면
$A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b는 서로소)이고,
A를 B로 나눈 몫을 Q라 하면
$A = BQ + R$에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G는 B와 R의 공약수이다.
한편, b와 $a - bQ$가 서로소가 아니라면
공약수인 m이 존재하여
$b = mk$, $a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a와 b의 공약수 m이 존재하므로 a와 b가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b와 $a - bQ$는 서로소이다.
$B = Gb$, $R = G(a - bQ)$에서 a와 $a - bQ$가 서로소이므로 B와 R의 최대공약수는 A와 B의 최대공약수와 같다.