1. 좌표평면 위의 점 A$(-2,\ 0)$ 과 중심이 C 인 원 $x^2-4x+y^2=0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\triangle$ACP 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

점P (a, b) 는 원 $x^2-4x+y^2=0$
위를 움직이고, 원의 중심 C$(2,\ 0)$ 과
점 A$(-2,\ 0)$ 에 대하여 P 의 좌표를 $(a,\ b)$,
$\triangle$ACP 의 넓이를 n 이라 하면,

$\triangle\mathrm{ACP}=\frac{1}{2}\times 4\times|b|=n$ (n 은 자연수, $|b|\le 2$)

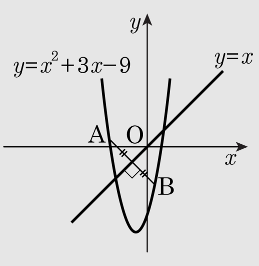
$\therefore |b|=\frac{n}{2}$

$n=1,\ \ 2,\ \ 3$ 일 때, 점P 는 각각 4 개씩이고,
$n=4$ 일 때, 점 P 는 2 개
따라서 $\triangle$ACP 의 넓이가 자연수가 되게 하는
점 P 의 개수는 총 14 (개)

2. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$　② $4\sqrt{2}$　③ $6\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{3}$　⑤ $5\sqrt{3}$

해설



A 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 두면
B 의 좌표는 $(b,\ a)$ 가 된다.
두 점은 포물선 위의 점이므로
$a = b^2 + 3b - 9,\ b = a^2 + 3a - 9$ 가 성립한다.
두 식을 변변 빼서 정리하면
$(a - b)(a + b + 4) = 0$
$\therefore\ a + b + 4 = 0\ (\because a \neq b)$
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면
$a^2 + 4a - 5 = 0,\ (a + 5)(a - 1) = 0$
$a = 1$ 또는 -5, $b = -5$ 또는 1 이므로
$A(-5,\ 1)$, $B(1,\ -5)$ 가 된다.
$\therefore \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

3. 어느 면접 시험에서 응시자가 다음 조건 중 세 가지, 두 가지, 한 가지를 만족하면 각각 A, B, C등급을 주고, 한 조건도 만족하지 못하면 F를 주기로 하였다.

> ㉠ 복장과 용모가 단정하고 친근감이 있다.
>
> ㉡ 몸가짐이 바르고 태도가 공손하다.
>
> ㉢ 답변의 내용이 논리적이고 설득력이 있다.

그런데 전체 응시자 50명 중에서 ㉠, ㉡, ㉢을 만족한 응시자는 각각 21, 15, 26명이고, F를 받은 응시자는 12명, A를 받은 응시자는 4명이었다. 이 때, B를 받은 응시자의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 명

▷ 정답: 16 명

해설

조건 ㉠, ㉡, ㉢을 만족하는 응시자의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(A) = 21$, $n(B) = 15$, $n(C) = 26$, $n(A \cap B \cap C) = 4$, $n((A \cup B \cup C)^c) = 12$

$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 50 - 12 = 38$

따라서, $n(A \cup B \cup C)$

$= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 28$이므로 두 조건만 만족하는 응시자의 수는 28명에서 세 조건을 모두 만족하는 4명이 3번 중복되었으므로 $28-(3\times 4)=16$(명)

4. 집합 $A=\{x|0\le x\le 2\}$ 에 대하여 함수 $f:A\to A$ 를 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$ 와 같이 정의한다. 이 때, $f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은?

(단, $f^2=f\circ f,\ f^3=f\circ f\circ f,\ \cdots$)

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

$f^2\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

$f^3\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

$\vdots$

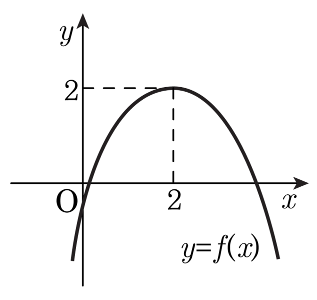
$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$

$=\left\{f\left(\frac{1}{3}\right)+f^3\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{29}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$+\left\{f^2\left(\frac{1}{3}\right)+f^4\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$=15\cdot\frac{4}{3}+15\cdot\frac{1}{3}=25$

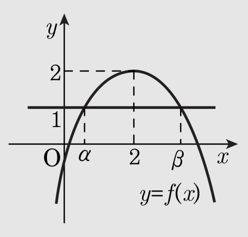
5. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$을 만족하는 t의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$를 만족하는 x의 값은 2개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$을 만족하는 x의 값은 2개이다.

6. 두 함수 $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

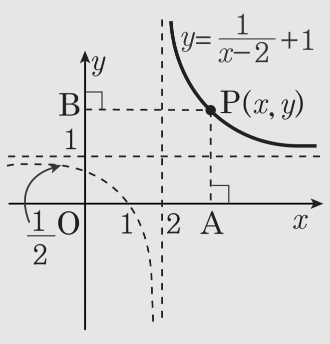
$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

7. 분수함수 $y=\dfrac{1}{x-2}+1(x>2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}}=y=\dfrac{1}{x-2}+1$ $\overline{\mathrm{PB}}=x(x>2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=x+\dfrac{1}{x-2}+1=x-2+\dfrac{1}{x-2}+3$

$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\dfrac{1}{x-2}}+3=5$

(단, 등호는 $x-2=\dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

8. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{12+c}{3+2}$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$f(1) = \dfrac{-3}{3} = -1$

9. 두 함수 $y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$, $y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때, $a+b$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

해설

$y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$ 이고,

$y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$ 이다.

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$\dfrac{2}{3}=-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{5}{3}=\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{10}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=2$

10. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(d>0)$ 와 $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f\circ g)(x)=x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x=m, y=n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ $-\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f\circ g=I$ 이므로
$g=f^{-1}$ 또는 $g^{-1}=f$
$y=g(x)$ 의 역함수를 구하면

$y=\dfrac{x+2}{3x+4}\Leftrightarrow 3yx+4y=x+2$

$\Leftrightarrow (3y-1)x=-4y+2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4y+2}{3y-1}$

$\therefore y=g^{-1}(x)=\dfrac{-4x+2}{3x-1},$

$$\begin{aligned} f(x)&=g^{-1}(x)\\ &=\frac{-4x+2}{3x-1}\\ &=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)\text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{4x-2}{-3x+1}\\ &=\frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}\\ &=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{4}{3}$

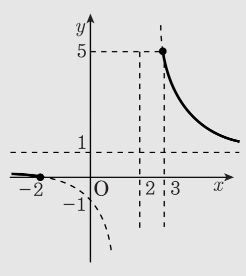
$\therefore m=\dfrac{1}{3}$, $n=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m+n=-1$

11. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서
$(x+2)(x-3) \geq 0$
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$
$y = \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{(x-2)+4}{x-2}$
$= \dfrac{4}{x-2} + 1$
즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서
$y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과
같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,
$x = 3$ 일 때, 최댓값 5
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

12. 함수 $f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1}=f_1\circ f_n(n=1,2,3,\cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

$f_2(1)=(f_1\circ f_1)(1)=f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$=\dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1}=-\dfrac{4}{3}$

$f_3(1)=(f_1\circ f_2)(1)=f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1}=1$

$f_4(1)=(f_1\circ f_3)(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4=f_1,\ f_5=f_2,\ f_6=f_3,\cdots$

$\therefore f_{3n+1}=f_1,\ f_{3n+2}=f_2,\ f_{3n}=f_3$

$100=3\times33+1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$