

1. 좌표평면 위의 점 $A(-2, 0)$ 과 중심이 C 인 원 $x^2 - 4x + y^2 = 0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

점 $P(a, b)$ 는 원 $x^2 - 4x + y^2 = 0$

위를 움직이고, 원의 중심 $C(2, 0)$ 과

점 $A(-2, 0)$ 에 대하여 P 의 좌표를 (a, b) ,

$\triangle ACP$ 의 넓이를 n 이라 하면,

$$\triangle ACP = \frac{1}{2} \times 4 \times |b| = n \quad (n \text{은 자연수, } |b| \leq 2)$$

$$\therefore |b| = \frac{n}{2}$$

$n = 1, 2, 3$ 일 때, 점 P 는 각각 4개씩이고,

$n = 4$ 일 때, 점 P 는 2개

따라서 $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는 총 14(개)

2. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$

② $4\sqrt{2}$

③ $6\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $5\sqrt{3}$

해설

A 의 좌표를 (a, b) 라 두면

B 의 좌표는 (b, a) 가 된다.

두 점은 포물선 위의 점이므로

$$a = b^2 + 3b - 9, \quad b = a^2 + 3a - 9 \text{ 가}$$

성립한다.

두 식을 변변 빼서 정리하면

$$(a - b)(a + b + 4) = 0$$

$$\therefore a + b + 4 = 0 \quad (\because a \neq b)$$

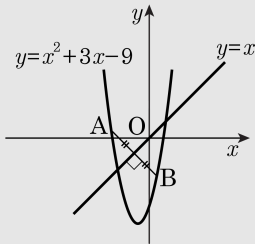
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면

$$a^2 + 4a - 5 = 0, \quad (a + 5)(a - 1) = 0$$

$a = 1$ 또는 -5 , $b = -5$ 또는 1 이므로

A $(-5, 1)$, B $(1, -5)$ 가 된다.

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$



3. 어느 면접 시험에서 응시자가 다음 조건 중 세 가지, 두 가지, 한 가지를 만족하면 각각 A, B, C 등급을 주고, 한 조건도 만족하지 못하면 F를 주기로 하였다.

- ㉠ 복장과 용모가 단정하고 친근감이 있다.
- ㉡ 몸가짐이 바르고 태도가 공손하다.
- ㉢ 답변의 내용이 논리적이고 설득력이 있다.

그런데 전체 응시자 50명 중에서 ㉠, ㉡, ㉢을 만족한 응시자는 각각 21, 15, 26명이고, F를 받은 응시자는 12명, A를 받은 응시자는 4명이었다. 이 때, B를 받은 응시자의 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 16명

해설

조건 ㉠, ㉡, ㉢을 만족하는 응시자의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$n(A) = 21, n(B) = 15, n(C) = 26, n(A \cap B \cap C) = 4, \\ n((A \cup B \cup C)^c) = 12$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 50 - 12 = 38$$

따라서, $n(A \cup B \cup C)$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

에서 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 28$ 이므로 두 조건만 만족하는 응시자의 수는 28명에서 세 조건을 모두 만족하는 4명이 3번 중복되었으므로 $28 - (3 \times 4) = 16$ (명)

4. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다. 이 때, $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\dots$)

① 20

② 25

③ 30

④ 35

⑤ 40

해설

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

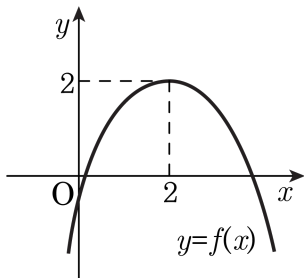
$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left\{ f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$+ \left\{ f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25$$

5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

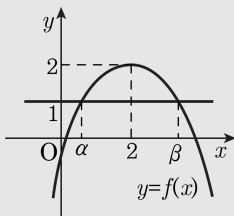
$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$

$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.

이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만

$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

6. 두 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

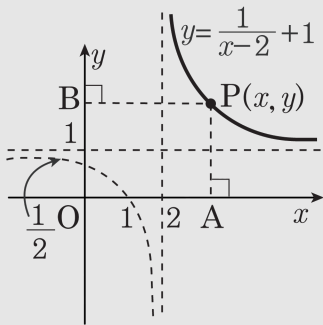
$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

7. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1$ ($x > 2$) 의 그래프 위의 한 점 $P(x, y)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$$

(단, 등호는 $x-2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

8. 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = \frac{bx+c}{x+d} \text{ 에 대하여}$$

$$\text{점근선이 } x = -2 \text{ 이므로 } f(x) = \frac{bx+c}{x+2}$$

$$\text{점근선이 } y = 4 \text{ 이므로 } f(x) = \frac{4x+c}{x+2}$$

이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$$\therefore c = -7$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{4x-7}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

9. 두 함수 $y = \frac{5x+1}{3x-2}$, $y = \frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때,
 $a+b$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{5}{3}$

③ 2

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$y = \frac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{3} \text{ 이고,}$$

$y = \frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{2}, y = \frac{a}{2} \text{ 이다.}$$

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$$\frac{2}{3} = -\frac{b}{2}, \frac{5}{3} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = \frac{10}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore a+b=2$$

10. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($d > 0$) 와 $g(x) = \frac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f \circ g)(x) = x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x = m, y = n$ 일 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ $-\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f \circ g = I$ 이므로

$$g = f^{-1} \text{ 또는 } g^{-1} = f$$

$y = g(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y = \frac{x+2}{3x+4} \Leftrightarrow 3yx + 4y = x + 2$$

$$\Leftrightarrow (3y-1)x = -4y+2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4y+2}{3y-1}$$

$$\therefore y = g^{-1}(x) = \frac{-4x+2}{3x-1},$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g^{-1}(x) \\ &= \frac{-4x+2}{3x-1} \\ &= \frac{ax+b}{cx+d} \quad (d > 0) \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-2}{-3x+1} \\ &= \frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{점근선의 방정식은 } x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}, n = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m + n = -1$$

11. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \frac{x+2}{x-2}$ 의

최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다.

이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서

$$(x+2)(x-3) \geq 0$$

$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

$$y = \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x-2)+4}{x-2}$$

$$= \frac{4}{x-2} + 1$$

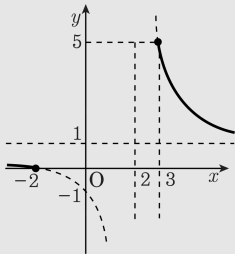
즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서

$y = \frac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과

같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,

$x = 3$ 일 때, 최댓값 5

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.



12. 함수 $f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1

② $-\frac{5}{2}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1} \text{ 에서 } f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{-\frac{10}{2} + 3}{\frac{5}{2} - 1} = -\frac{4}{3}$$

$$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{3} + 3}{\frac{4}{3} - 1} = 1$$

$$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore f_4 = f_1, f_5 = f_2, f_6 = f_3, \dots$$

$$\therefore f_{3n+1} = f_1, f_{3n+2} = f_2, f_{3n} = f_3$$

$$100 = 3 \times 33 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f_{100}(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$