1. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
$\therefore\ 4^3 = 64$
$\therefore\ a+b=64$

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x+4$, $f(x)=x^2$ 일 때, $(h\circ(g\circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(2) &= ((h\circ g)\circ f)(2)\\ &= (h\circ g)(f(2))\\ &= (h\circ g)(4)\\ &= 3\times 4+4=16\end{aligned}$$

3. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

4. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이고

$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 2+3-2 = 3$

5. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2 (x \geq 1) \\ 1 (x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

ⅰ) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ⅱ) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
$\therefore\ y = (f \circ f)(x) = 2$

6. 다음 중 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$ 을 간단히 한 것은?

① $\frac{2}{13}$ ② $\frac{4}{13}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{23}{30}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

해설

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$

$=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{5}{14}$

7. 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt{(-b)^2} = -b$

② $(-\sqrt{-a})^2 = -a$

③ $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{a}$

④ $(\sqrt{a})^2 = -a$

⑤ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이면 $a < 0,\ b < 0$

④의 경우 $(\sqrt{a})^2 = |a|(i)^2 = -|a| = a$이므로 옳지 않다.

8. $x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 의 값은?

① $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$　② $\sqrt{2}+\sqrt{3}$　③ 1

④ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

해설

$x = \sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ x+y = \sqrt{6}$, $xy = 1$, $y > x$

한편, $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2$

$= \dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x+y+2\sqrt{xy}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$

$= \dfrac{(\sqrt{6})^2-4\sqrt{6}+4}{(\sqrt{6})^2-2^2}$

$= 5-2\sqrt{6}$

따라서, $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = -\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

$= -(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$= \sqrt{2}-\sqrt{3}$

9. $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$일 때, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$의 값을 구하면?

① 202　② 204　③ 206　④ 208　⑤ 210

해설

$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} = x$

$\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{17-2\sqrt{72}} = \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2}$

$= 3-2\sqrt{2} = y$

$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x+y) + y^2(x+y)$

$= (x+y)(x^2+y^2)$

각각 x, y를 대입하여 계산한다.

$(x+y)(x^2+y^2) = 34 \times 6 = 204$

10. 함수 $y = 1 - \sqrt{2 - x}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$ 이다.

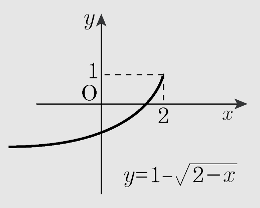
② 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$ 이다.

③ 그래프는 점 $(-2,\ -1)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

해설



① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.
② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.
④ 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.

11. $-5 \le x \le 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{4-x} - 7$ 의 최댓값을 m , 최솟값을 n 라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -8　　② -6　　③ -4　　④ -2　　⑤ 0

해설

$y = 2\sqrt{4-x} - 7 = 2\sqrt{-(x-4)} - 7$

주어진 함수의 그래프는 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = -5$ 일 때, 최댓값 $m = 2\sqrt{4-(-5)} - 7 = -1$

$x = 3$ 일 때, 최솟값 $n = 2\sqrt{4-3} - 7 = -5$

$\therefore\ m+n = -1 + (-5) = -6$

12. 함수 $f(x)=x+2$ 에 대하여 $f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3,\ \cdots\ f\circ f^{99}=f^{100}$ 으로 정의할 때, $f^{100}(1)$ 의 값을 구하여라.

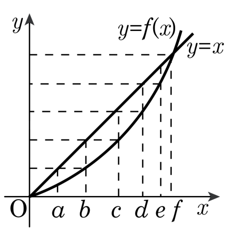
▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$f(x)=x+2$
$f^2(x)=f(f(x))=f(x+2)=(x+2)+2$
$\quad =x+2\cdot 2$
$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x+2\cdot 2)=(x+2\cdot 2)+2$
$\quad =x+2\cdot 3$
$\vdots$
$f^{100}(x)=x+2\cdot 100$
$\therefore\ f^{100}(1)=1+2\cdot 100=201$

13. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$의 그래프이고 직선은 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$이다.)



① $2a$　　② $b + e$　　③ $c + d$

④ $2c$　　⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b$, $(g \circ g)(c) = e$

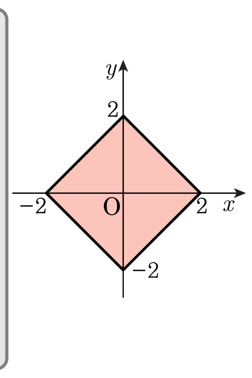
f와 g는 역함수 관계. 즉 $y = x$에 대칭이다.

14. $|x|+|y|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$|x|+|y|=2$ 의 그래프는
$x+y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이동한 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 8$



15. $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, $B=\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}}$, $C=\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x=\dfrac{2}{5}$ 일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A>B>C$ ② $A\geq B=C$ ③ $A<B<C$
④ $A\leq B=C$ ⑤ $A=B=C$

해설

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2}{7}}=\frac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{7}{9}$$

$$B=\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+5}}=\frac{1}{\frac{8}{7}}=\frac{7}{8}$$

$$C=\frac{3}{3+\frac{3}{3+\frac{3}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{2}}}=\frac{1}{\frac{23}{21}}=\frac{21}{23}$$

$\therefore\ A=\dfrac{21}{27},\ B=\dfrac{21}{24},\ C=\dfrac{21}{23}$

$\therefore A<B<C$

16. 세 자연수 $a,\ b,\ c$가 $\frac{2b}{a}=\frac{3c}{2b}=\frac{a}{3c}$를 만족하고 $a,\ b,\ c$의 최소공배수가 12일 때, $a+b+c$의 값은?

① 22　② 20　③ 18　④ 16　⑤ 14

해설

$a+2b+3c\neq 0$ ($\because a,\ b,\ c$는 자연수)이므로
가비의 리에 의하여
$\frac{2b}{a}=\frac{3c}{2b}=\frac{a}{3c}=\frac{a+2b+3c}{a+2b+3c}=1$에서
$a=3c,\ a=2b\ \ \therefore b=\frac{1}{2}a,\ \ c=\frac{1}{3}a$
$\therefore a : b : c = a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$
$= 6 : 3 : 2$
세 수의 최대공약수를 G라 하면
$a=6G,\ b=3G,\ c=2G$
(최소공배수)$=6G=12,\ G=2$
그러므로 $a=12,\ b=6,\ c=4$
$\therefore\ a+b+c=22$

17. 함수 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y = g(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B 라 할 때 선분 AB 의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$\dfrac{x+2}{x-1} = x,\ x + 2 = x^2 - x$

$x^2 - 2x - 2 = 0,\ x = 1 \pm \sqrt{3}$ 이므로

$\mathrm{A}(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}),\ \mathrm{B}(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$

18. $f(x)$는 유리수를 계수로 하는 x의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$일 때, $a - b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ 0　⑤ 3

해설

$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}} = 2+\sqrt{3}$

$\therefore\ f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2+\sqrt{3})$

$= (2+\sqrt{3})^2 + a(2+\sqrt{3}) + b$

$= (7+2a+b) + (4+a)\sqrt{3} = 0$

그런데, $7+2a+b,\ 4+a$는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$7+2a+b = 0,\ 4+a = 0 \quad \therefore\ a = -4,\ b = 1$

$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

해설

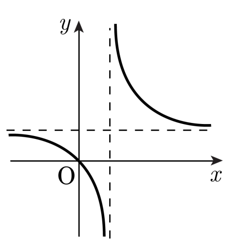
$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3}$은 $x^2+ax+b=0$의 한 근이고, $a,\ b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

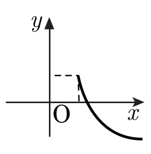
두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$

$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

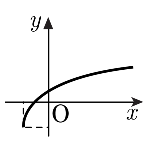
19. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



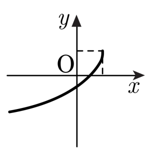
①



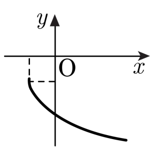
②



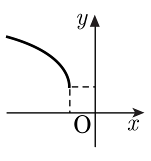
③



④



⑤



해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

20. 함수 $f(x)$가 임의의 x, y에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$를 만족시킬 때, $f(1)\cdot f(2)$의 값은? (단, $f(0)=1$)

① 1 ② 4 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

임의의 x, y에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$일 때

ⅰ) $x=1$, $y=0$을 대입

$f(1+0)+f(0-1)-2f(0)=2\times1$ ($\because\ f(0)=1$)

$f(1)+f(-1)-2\times1=2\times1$

$2f(1)=4$ ($\because f(1)=f(-1)$) $\rightarrow f(1)=2$

ⅱ) $x=1$, $y=1$을 대입

$f(1+1)+f(1-1)-2f(1)=2\times1$

$f(2)+f(0)-2\times2=2$

$f(2)+1-4=2\ \rightarrow\ f(2)=5$

$\therefore\ f(1)\cdot f(2)=2\times5=10$

21. 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이고, 다음을 만족한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

Ⅰ. 임의의 실수 x, y 에 대하여
$$g(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$$
Ⅱ. $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

① $g(0)=1$
② $g(1)=0$
③ $g(2)=-1$
④ $g(-1)=-2$
⑤ $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$

해설

Ⅰ. 에서 $x=y$ 라 하면
$g(0)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ $\cdots$ ㉠
ⅰ) ㉠에서 $x=0$ 라 하면
$$g(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2$$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(0)=0$ 이므로
$g(0)=\{g(0)\}^2$ $\therefore\ g(0)=0,\ 1$
만약, $g(0)=0$ 라고 하면,
㉠에서 $0=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ 이고
함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이므로
$f(x)=0$ 가 된다.
이것은 Ⅱ. 에서 $f(1)=1$ 이라는 것에 모순이다.
따라서 $g(0)=1$ $\cdots$ ①
㉠에 의해서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$ $\cdots$ ⑤
ⅱ) ⑤에서 $x=1$ 라 하면
$$1=\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2$$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(1)=1$ 이므로
$g(1)=0$ $\cdots$ ②
ⅲ) ⑤에서 $x=-1$ 라 하면
$$1=\{f(-1)\}^2+\{g(-1)\}^2$$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(-1)=-1$ 이므로
$g(-1)=0$ $\cdots$ ④
Ⅰ. 에서 $x=1,\ y=-1$ 라 하면
$g(2)=f(1)f(-1)+g(1)g(-1)$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(-1)=-1,\ f(1)=1$ 이고,
②, ④에 의해 $g(1)=0,\ g(-1)=0$ 이므로
$g(2)=-1$ $\cdots$ ③

22. 다음 보기의 함수 $y=f(x)$ 중 임의의 실수 a , b 에 대하여 관계식 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 만족시키는 것을 모두 고르면?

보기

㈎ $y=x$
㈏ $y=x^2-1$
㈐ $y=-x^2+1$

① ㈎ ② ㈎, ㈏ ③ ㈎, ㈐
④ ㈏, ㈐ ⑤ ㈎, ㈏, ㈐

해설

곡선의 오목, 볼록에 따른 부등식을 살펴보면

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 아래로 볼록인 함수

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 직선

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 위로 볼록인 함수이다.

따라서 ㈎는 직선, ㈏는 아래로 볼록인 함수
㈐는 위로 볼록인 함수 이므로 주어진 부등식을 만족하는 함수는
㈎, ㈏이다.

23. a, b, c가 실수일 때, $a+b=4ab$, $b+c=10bc$, $c+a=6ca$이 성립한다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$a+b=4ab$에서 $\frac{a+b}{ab}=4$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$

같은 방법으로 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=6$

$\therefore 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=20$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$

24. 0이 아닌 세 수 $x,\ y,\ z$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하시오.

㉠ x, y, z 중 적어도 하나는 6이다.
㉡ x, y, z의 각각의 역수의 합은 $\frac{1}{6}$이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

㉠ 에서 $(x-6)(y-6)(z-6)=0 \cdots ①$

㉡ 에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore 6(xy+yz+zx)=xyz$

①에서 $xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0$

$\therefore 36(x+y+z)=216$

따라서, $2(x+y+z)=12$

25. 분수함수 $y = \dfrac{kx+1}{x-1}$ $(k \neq 0)$ 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 않은 것은?

① 치역은 k을 제외한 실수 전체집합이다.

② $(1,\ k)$에 대하여 대칭이다.

③ 정의역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.

④ 점근선은 $x = 1$, $y = k$ 이다.

⑤ $y = -x + k$ 에 대하여 대칭이다.

해설

$y = \dfrac{kx+1}{x-1} = \dfrac{k+1}{x-1} + k$

⑤ 기울기가 ± 1 이고 점 $(1,\ k)$ 을 지나는 직선에 대칭이다.