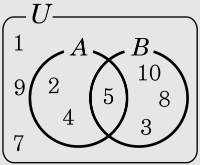
1. $U = \{x | x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{2, 4\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A^c \cap B^c = \{1, 6, 7, 9\}$ 일 때, 집합 B는?

① $\{3, 5\}$ ② $\{5, 7\}$ ③ $\{3, 5, 8\}$

④ $\{3, 5, 10\}$ ⑤ $\{3, 5, 8, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c = \{1, 6, 7, 9\}$ 이므로



따라서 $B = \{3, 5, 8, 10\}$ 이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 28$, $n(B) = 35$, $A \cap B = \varnothing$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = 28 + 35 = 63$

3. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm은 홀수이면 n^2+m^2이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n,m 모두 홀수이면 n^2,m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

4. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 중 등식이 성립하지 않는 것은?

① $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

② $(A-B)^c-B=(A\cap B)^c$

③ $(A\cap B)-C=A\cap(B-C)$

④ $A\cap(A\cup B)^c=\phi$

⑤ $(B-C)\cap(B-A)=B\cap(A\cup C)^c$

해설

② $(A-B)^c-B=(A\cap B^c)^c\cap B^c=(A^c\cup B)\cap B^c=(A^c\cap B^c)\cup(B\cap B^c)$
$=(A^c\cap B^c)=(A\cup B)^c$

5. 지현이네 반 35 명의 학생 중에서 수학을 좋아하는 학생은 18 명, 영어를 좋아하지 않는 학생은 15 명, 수학만 좋아하는 학생은 10 명일 때, 영어만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

① 7 명 ② 8 명 ③ 10 명 ④ 12 명 ⑤ 14 명

해설

전체 학생의 집합을 U , 수학을 좋아하는 학생을 A , 영어를 좋아하는 학생을 B 라 하자.

$n(U) = 35, n(A) = 18, n(B^c) = 15, n(A - B) = 10$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 35 - 15 = 20$ 이고

$n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 18 - 10 = 8$ 이다.

따라서 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 20 - 8 = 12$ 이다.

6. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 명제 $p \Rightarrow \sim q$, $q \Rightarrow r$, $s \Rightarrow q$일 때, 보기 중 참인 명제의 개수는?

㉠ $q \Rightarrow p$	㉡ $s \Rightarrow r$	㉢ $r \Rightarrow s$
㉣ $p \Rightarrow \sim s$	㉤ $q \Rightarrow \sim p$	㉥ $\sim r \Rightarrow \sim q$
㉦ $s \Rightarrow \sim p$		

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

㉡, ㉣, ㉤, ㉥, ㉦이 참이다.

$p \Rightarrow \sim q$, $q \Rightarrow r$, $s \Rightarrow q$이므로

그 각각의 대우도 참이다.

$\therefore q \Rightarrow \sim p$, $\sim r \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim s$

$p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim s$ 이므로

$\therefore p \Rightarrow \sim s$, $s \Rightarrow \sim p$

$s \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로

$\therefore s \Rightarrow r$

7. 두 조건 $p: -1 \leqq x < 3$, $q: a \leqq x-3 \leqq b$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

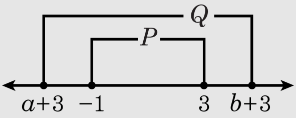
① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$p: \ -1 \leqq x \leqq 3$

$q: a \leqq x-3 \leqq b \rightarrow a+3 \leqq x \leqq b+3$

$p \rightarrow q \ \therefore P \subset Q$



$\therefore a+3 \leq -1, b+3 \geq 3$ 즉, $a \leq -4, b \geq 0$

$\therefore M=-4, m=0, \ M+m=-4$

8. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. p 는 q 이기 위한 충분조건이고 $\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $R \cap Q = R$　　② $R \cup Q = R$　　③ $P \cap Q = \varnothing$

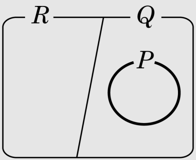
④ $P \cup R = R$　　⑤ $P \cap R = \varnothing$

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

$\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로 $R^c = Q$

따라서, 세 집합의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같으므로



$\therefore\ P \cap R = \varnothing$

9. $a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$일 때, $ax+by$가 취하는 값의 범위를 구하면?

① $-4 \le ax+by \le 4$
② $-9 \le ax+by \le 9$
③ $-6 \le ax+by \le 6$
④ $0 \le ax+by \le 36$
⑤ $-36 \le ax+by \le 36$

해설

$a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$이면
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$에서
$4 \cdot 9 \ge (ax+by)^2$
$\therefore -6 \le ax+by \le 6$

10. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 100 이상 250 이하 12의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 100 보다 작은 4의 배수$\}$ 일 때, $n(B) - n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$n(A) = 12, \quad n(B) = 24$

$n(B) - n(A) = 24 - 12 = 12$

11. 두 집합 $A = \{a,\ b,\ 7\}$, $B = \{a+1,\ 4,\ 6\}$에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$ 일 때, $a \times b$의 값은?

① 16　② 20　③ 24　④ 28　⑤ 32

해설

$A \subset B$이고 $B \subset A$는 $A = B$이다. 집합 A, B의 모든 원소가 같아야 하므로 $a+1=7$ 이다.
즉 $a = 6$이고 집합 $B = \{7,\ 4,\ 6\}$이므로 $b = 4$이다. 따라서 $a \times b = 6 \times 4 = 24$이다.

12. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A=\{1,\ 4,\ 5,\ 7, 8\}$, $A\cap B=\{1,\ 4,\ 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 B 는 원소 1, 4, 8을 포함하고 원소 5, 7 을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2}=2^3=8$(개) 이다 .

13. 자연수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $B = \{a_k + b | a_k \in A\}$가 있다. $A \cap B = \{4, 7, 9\}$이고, 집합 A의 원소의 합이 32, $A \cup B$의 원소의 합이 62일 때, 집합 B의 원소 중 가장 큰 수와 작은 수의 차를 구하여라.

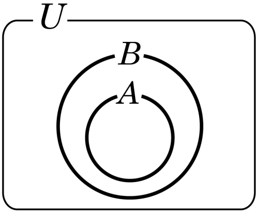
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$A \cap B$의 원소의 합에서 집합 A의 원소의 합을 빼고,
$A \cup B$의 원소의 합을 더해 주면
집합 B의 원소의 합이 되므로, 집합 B의 원소의 합은 50이다.
집합 A의 원소의 합이
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 32$이고,
$B = \{a_1 + b, a_2 + b, a_3 + b, a_4 + b, a_5 + b, a_6 + b\}$이므로
집합 B의 원소의 합은
$a_1 + b + a_2 + b + a_3 + b + a_4 + b + a_5 + b + a_6 + b = 32 + 6b$
$32 + 6b = 50$ 이므로 $b = 3$이 된다.
교집합의 원소인 $4, 7, 9$는 집합 A와 B의 원소이므로 각각 3을 더한 7, 10, 12도 집합 B의 원소가 된다.
또 집합 B의 원소의 합이 50이므로 4, 7, 9, 10, 12와 8이 된다.
$\therefore B = \{4, 7, 8, 9, 10, 12\}$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 벤 다이어그램을 만족할 때, 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)



① $A - B = \varnothing$　　② $B \cap A^c = \varnothing$　　③ $B^c \subset A^c$

④ $U \subset (A \cup B)$　　⑤ $U - A^c = B$

해설

② $B \cap A^c \neq \varnothing$

④ $(A \cup B) \subset U$

⑤ $U - A^c = A$

15. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$

$= a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$(단 $a = b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a = b$)

④ (반례) $a = 1$

$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$

$\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b = c$)

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c = a$)

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$

(등호 성립조건은 $a = b = c$)

16. 자연수 전체의 집합의 부분집합 A에 대하여 다음을 만족하는 집합 A의 개수는? (단, $A \neq \phi$)

$x \in A$이면 $\dfrac{81}{x} \in A$

① 5개　② 6개　③ 7개　④ 8개　⑤ 9개

해설

A 는 81의 약수를 원소로 하는 집합인데
$n(A)=1$인 경우는 $\{9\}$ 1개
$n(A)=2$인 경우는 $\{1,\ 81\}$, $\{3,\ 27\}$ 2개
$n(A)=3$인 경우는 $\{1,\ 9,\ 81\}$, $\{3,\ 9,\ 27\}$ 2개
$n(A)=4$인 경우는 $\{1,\ 3,\ 27, 81\}$ 1개
$n(A)=5$인 경우는 $\{1,\ 3,\ 9, 27, 81\}$ 1개
$\therefore$ 7 개

17. 집합 $S=\{2,3,5,7\}$ 에 대하여 집합 $A=\{xy|x\in S, y\in S\}$ 이다. 집합 A 의 부분집합 중 임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

자연수 N 의 약수의 개수가 3 개이면 N 은 소수의 제곱수이다.
$S=\{2,3,5,7\}$, $A=\{xy|x\in S, y\in S\}$ 이고 S 의 원소는 모두 소수이므로,
임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분집합은 $\{2^2,3^2,5^2,7^2\}=\{4,9,25,49\}$ 의 부분집합이다.
따라서 $2^4=16$ (개)

18. z이 0이 아닌 복소수라 할 때,

$\overline{z+\bar{z}} = z+\bar{z}$인 z을 C_1,

$C_2 = \{z \in C^* \mid \overline{z-\bar{z}} = z-\bar{z}\}$

$C_3 = \{z \in C^* \mid z^2 = -z\bar{z}\}$

$$C_4 = \left\{z \in C^* \,\middle|\, \overline{\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{z}\right\}$$

에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $C_1 \cap C_2 = C_3$　② $C_2 \cap C_3 = C_1$　③ $C_3 \cap C_4 = C_2$

④ $C_2 \cup C_3 = C_4$　⑤ $C_3 \cup C_4 = C_1$

해설

$z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$ (a, b는 실수)라 하면

i) $\overline{z+\bar{z}} = z+\bar{z}$이므로 $z+\bar{z}$가 실수

그런데 $z+\bar{z} = 2a$ (실수)가 항상 성립한다.

$\therefore$ C_1은 복소수 전체의 집합이다.

ii) $\overline{z-\bar{z}} = z-\bar{z}$이므로 $z-\bar{z}$가 실수

그런데 $z-\bar{z} = 2bi$가 실수 이므로 $b=0$이다.

$\therefore$ C_2은 실수의 집합이다.

iii) $z^2 = -z\bar{z} = 0$, $z(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z+\bar{z} = 0$

($\because z \neq 0$)

$z+\bar{z} = 2a = 0$이므로 $a=0$이다.

$\therefore$ C_3은 순허수의 집합이다.($\because z \neq 0$)

iv) $\overline{\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{z}$, $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z} \Leftrightarrow z^2 = \overline{z^2}$

$(z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0$에서 $z=\bar{z}$ 또는 $z=-\bar{z}$

따라서 z는 실수 또는 순허수이다.

$\therefore$ C_4는 실수와 순허수의 합집합이다.

i) ~ iv)에 의하여 $\therefore$ $C_2 \cup C_3 = C_4$

19. 집합 $A_k = \{x|x$는 10 이하의 k의 배수$\}$ 이라 정의한다. 집합 $P = \{xy|x \in A_2,\ y \in A_3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

- $X \subset P$
- $X \cap \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$
$= \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$

▶ **답 :** 개

▷ **정답 :** 512 개

해설

$A_k = \{x|x$는 10 이하의 k의 배수$\}$,
$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$,
$P = \{xy|x \in A_2,\ y \in A_3\} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 72, 90\}$
,
$X \subset P$, $\{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\} = \{24, 48\}$ 이므로
$X \cap \{xy|x \in A_4, y \in A_6\} = \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$, $\{24, 48\} \subset X$
따라서 집합 X 는 집합 P 의 부분집합 중, 24 , 48 을 반드시 포함하는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는 $2^{11-2} = 512$ (개)

20. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 $X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 라고 정의한다.
전체집합
$U = \{x | x \leq 60,\ x\text{는 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x | x\text{는 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{x | x\text{는 } 6\text{의 배수}\}$, $C = \{x | x\text{는 } 8\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

$X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c = (X \cup Y) - (X \cap Y)$
,
$A = \{x | x\text{는} 4\text{의 배수}\}$
$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48,$
$52, 56, 60\}$,

$B = \{x | x\text{는} 6\text{의 배수}\}$
$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\}$,

$C = \{x | x\text{는} 8\text{의 배수}\}$
$= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$,

$(A \bullet B) \bullet C$
$= \{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44, 52, 54,$
$56\} \bullet C$
$= \{4, 6, 18, 20, 24, 28, 30, 42, 44, 52, 54\}$
$\therefore (A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값$= 54$