1. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\frac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4 \\ 4x-4 < x+2 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4$ 의 양변에 2를 곱하면

$6x+2 \geq x-8$

$5x \geq -10$

$x \geq -2$

$4x-x < 2+4$

$3x < 6$, $x < 2$

그러므로 $-2 \leq x < 2$

$a+b = (-2)+1 = -1$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+5<3x+2 \\ \dfrac{x-5}{4}<-\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(i) $2x+5<3x+2$, $x>3$

(ii) $\dfrac{x-5}{4}<-\dfrac{x+1}{2}$, $x<1$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수는 없다.

4. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$(x+4)(x-2) < 0$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$

$\therefore a = -8$

5. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면
$1 \le -x \le 2$
다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$
각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$
각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$
$\therefore p = 3, q = 4$
$\therefore pq = 12$

6. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값은?

$$\begin{cases} 7x+4>5x \\ 15-x>a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6
④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설
$7x+4>5x \qquad \therefore\ x>-2$
$15-x>a \qquad \therefore\ x<15-a$
만족하는 정수는 10 개이므로 −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 이다.
$8<15-a\le 9$
$6\le a<7$
$\therefore\ a=6$

7. x에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1) - 1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 범위는?

① $a \le -3$ 또는 $a \ge 1$ ② $-3 \le a \le 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$ ④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \le a \le 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1)-1$을 전개하여 이항하면 $x^2+(1-a)x-a+1 < 0$
이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \le 0$이면 부등식의 해가 없다.

$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \le 0$

$(a-1)(a+3) \le 0$

$\therefore\ -3 \le a \le 1$

8. 부등식 $|x^2-5x+5| \le 1$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$|x^2-5x+5| \le 1$

$\Rightarrow \quad x^2-5x+5 \ge -1, \quad x^2-5x+5 \le 1$

ⅰ) $x^2-5x+5 \ge -1$

$x^2-5x+6 \ge 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x-3) \ge 0$

$\Rightarrow \quad x \le 2$ 또는 $x \ge 3$

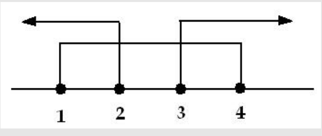
ⅱ) $x^2-5x+5 \le 1$

$x^2-5x+4 \le 0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x-4) \le 0$

$\Rightarrow \quad 1 \le x \le 4$

공통부분을 구하면,



$\Rightarrow \quad 1 \le x \le 2$ 또는 $3 \le x \le 4$

$\therefore \quad x = 1, 2, 3, 4$

9. x의 이차방정식 $mx^2 + 2(1-2m)x + m = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0 < m < \frac{1}{3}$　　② $m < \frac{1}{3},\ m > 1$

③ $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$　　④ $m < 0\ ,\ m > 1$

⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0$ $\cdots$㉠

$\frac{D}{4} = (1-2m)^2 - m^2 > 0$에서

$(m-1)(3m-1) > 0,\ m < \frac{1}{3},\ m > 1$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$

10. $1 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

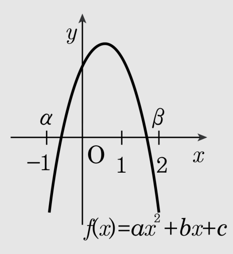
11. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근 α, β 가 $-1<\alpha<0,\ 1<\beta<2$ 일 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면 ? (단, $a<0$)

㉠ $c<0$	㉡ $ab<0$
㉢ $a-b+c<0$	㉣ $a+2b+4c>0$

① ㉠　　② ㉡, ㉢　　③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설



$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$로 놓으면

$-1<\alpha<0, 1<\beta<2$ 에서

㉠) $f(0)=c>0$

㉡) 꼭짓점의 x좌표가 양이므로 $-\frac{b}{2a}>0$ $\therefore ab<0$

㉢) $f(-1)=a-b+c<0$

㉣) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c>0,\ \frac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

$\therefore a+2b+4c>0$

12. 부등식 $\frac{1}{2}x-\frac{4}{3} \le x-\frac{x+2}{3} \le \frac{1}{4}x+6$을 만족하는 음이 아닌 정수 x의 값의 개수는?

① 18개　② 17개　③ 16개　④ 3개　⑤ 2개

해설

ⅰ) $\frac{1}{2}x-\frac{4}{3} \le x-\frac{x+2}{3}$, $3x-8 \le 6x-2x-4$

$\therefore\ x \ge -4$

ⅱ) $x-\frac{x+2}{3} \le \frac{1}{4}x+6$, $12x-4x-8 \le 3x+72$

$\therefore\ x \le 16$

ⅰ), ⅱ)에서 공통된 x의 값의 범위를 구하면

$-4 \le x \le 16$

한편, x는 음이 아닌 정수이므로 $0 \le x \le 16$

따라서 $x=0, 1, 2, \cdots, 16$의 17개이다.

13. 구슬을 보관함 1 상자당 구슬을 4 개씩 넣으면 구슬이 5 개가 남고, 구슬을 5 개씩 넣으면 모두 넣을 수 있지만 마지막 보관함에는 구슬이 2 개 이상 4 개 이하가 들어간다. 보관함의 개수로 가능한 것의 개수로 <u>틀린</u> 것을 모두 고르면?

① 4 상자　　② 5 상자　　③ 6 상자

④ 7 상자　　⑤ 8 상자

해설

보관함 x상자가 있다고 하면, 구슬의 수는 $(4x+5)$개 이다. 구슬을 5 개씩 넣을 경우 $x-1$ 개 까지는 5 개씩 들어가 있지만 마지막 보관함에는 2 개 이상 4 개 이하가 들어가게 된다. 2 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면, $5(x-1)+2$ 이고, 4 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $5(x-1)+4$ 이다. 구슬의 수는 보관함에 5 개씩 넣고 마지막 보관함에 2 개가 들어있는 경우와 4 개가 들어있는 경우 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $5(x-1)+2 \le 4x+5 \le 5(x-1)+4$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 5(x-1)+2 \le 4x+5 \\ 4x+5 \le 5(x-1)+4 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 6 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $6 \le x \le 8$ 이다. 따라서 보관함은 6상자 또는 7상자 또는 8상자가 있다.

14. 제주시에서 남서쪽 1100 km 해상에 태풍의 중심이 있다. 이 태풍은 중심에서 반지름 50 km 이내가 폭풍우권이며, 30 km/h 의 속도로 북동진한다. 지름도 10 km/h 씩 넓어진다. 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은? (단, 제주시는 점으로 생각하고, 태풍은 직진한다고 가정한다.)

① 15 시간　　② 16 시간　　③ 30 시간

④ 46 시간　　⑤ 50 시간

해설

$|-1100 + 30x - 0| \le 50 + 5x$

$-50 - 5x \le -1100 + 30x \le 50 + 5x$

$25x \le 1150$ 에서 $x \le 46$

$35x \ge 1050$ 에서 $x \ge 30$

$\therefore 30 \le x \le 46$

따라서, 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은 $46-30 = 16$(시간) 이다.

15. 부등식 $(x-2)(ax-1)<0$의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a가 있다.
② $a=0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
③ $a<0$이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a}<x<2$이다.
④ $a>0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a \neq 0$일 때
$(x-2)(ax-1)=a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$이므로
$a=\frac{1}{2}$이면 이 부등식의 해는 없다.
② $a=0$이면 이 부등식은 $-(x-2)<0$,
즉 $x-2>0$이므로 해는 $x>2$이다.
③ $a<0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$이므로
$x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>2$이다.
④ $a>0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$이므로
$a<\frac{1}{2}$일때, $2<x<\frac{1}{a}$,
$a>\frac{1}{2}$일때 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

16. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$　② $-2 \le x < 5$　③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$　⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서

$n-1 < [x-1] < n$이므로

$[x-1] = [x]-1$

$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$

$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$

$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$

$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$

$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$

$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로

$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\therefore 1 \le x < 5$

17. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+2xy+2x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=1,\ \ b>2$ ② $a=1,\ \ b<2$ ③ $a=2,\ \ b>1$

④ $a=2,\ \ b\geq 1$ ⑤ $a=2,\ \ b\leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(1+y)x+y^2+ay+b>0$ 이고

임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는

$D/4<0$를 만족해야 한다.

$D/4=(1+y)^2-(y^2+ay+b)<0$

$\therefore (2-a)y+1-b<0\cdots$①

①식이 모든 실수 y에 성립할 조건은

$(2-a)=0,\ \ 1-b<0,$

$\therefore a=2,\ \ b>1$

18. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

19. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 1$ 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \le 2$ ② $-2 < a < 4$ ③ $-4 \le a \le 2$
④ $\frac{2}{3} < a \le 4$ ⑤ $a \ge 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$의 두 근이 -2와 1
사이에 있으므로
(i) $D = a^2 - 4(2a - 3) \ge 0$에서
$a^2 - 8a + 12 \ge 0$, $(a-2)(a-6) \ge 0$
$\therefore\ a \le 2$ 또는 $a \ge 6$
(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$에서
$1 > 0$이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$에서
$3a > 2 \quad \therefore\ a > \frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y = f(x)$의 그래프의 축의
방정식이 $x = -\frac{a}{2}$이므로
$-2 < -\frac{a}{2} < 1$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 a의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \le 2$

20. 연립부등식 $x+2<4$ 와 $5x-8<17$ 의 해를 구하면?

① $x<2$　② $x>5$　③ $2<x\le 5$
④ $2\le x<5$　⑤ 해가 없다.

해설
$x+2<4,\ x<2$
$5x-8<17,\ x<5$
따라서 $x<2$

21. 유리수 a 에 대하여 a 를 넘지 않는 최대의 정수를 $[a]$ 로 정의한다. $[x]-[y]=1$, $6<[x]+[y]<8$ 일 때, $[3x-2y]$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 8

해설

$[x]$, $[y]$ 이 정수이므로 $6<[x]+[y]<8$ 도 정수이어야 한다.
따라서 $[x]+[y]=7\cdots$ ㉠
$[x]-[y]=1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $[x]=4$, $[y]=3$
$[x]=4$ 에서 $4\le x<5$
$\therefore\ 12\le 3x<15\cdots$ ㉢
$[y]=3$ 에서 $3\le y<4$
$\therefore\ -8<-2y\le -6\cdots$ ㉣
㉢ + ㉣을 하면 $4<3x-2y<9$
$\therefore\ [3x-2y]=5,\ 6,\ 7,\ 8$

22. $5(x-1)$ 을 일의 자리에서 반올림한 값은 $2(x+6)$ 과 같을 때, 정수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 7

해설

$5(x-1)$을 일의 자리에서 반올림한 값이 $2(x+6)$ 과 같다. 참값 $5(x-1)$ 의 일의 자리에서 반올림하여 얻은 근삿값 $2(x+6)$ 의 오차의 한계는 5 이므로

$2(x+6)-5 \le 5(x-1) < 2(x+6)+5$

$2(x+6)-5 \le 5(x-1)$ 에서 $x \ge 4$

$5(x-1) < 2(x+6)+5$ 에서 $x < \dfrac{22}{3}$

$\therefore\ 4 \le x < \dfrac{22}{3}$

따라서 구하는 정수 x 의 값은 4, 5, 6, 7 이다.

23. 원가에 2 할의 이익률로 정가를 정한 상품을 $x\%$ 의 할인율로 할인 판매하였을 때, 이익률이 0% 이상 10% 이하가 되게 하려고 한다. 자연수 x의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

원가를 a 원이라 하면 정가는 $1.2a$ 원이고
정가의 $x\%$ 를 할인한 가격은 $1.2a(1-0.01x)$ 원이다. 이익률이 0% 이상 10% 이하가 되려면
$a \le 1.2a(1-0.01x) \le 1.1a$
$\therefore \frac{25}{3} \le x \le \frac{50}{3}$
x가 될 수 있는 자연수는
9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
따라서 x의 최댓값은 16

24. 야구경기에서 야구선수의 타율을 (안타수÷ 타석수) 로 정한다고 하자. 두 타자 A 와 B 는 오늘 현재 각각 30 타석과 25 타석을 기록중이고 A 선수가 친 안타수는 B 선수가 친 안타수보다 2 개 많고 현재 A 는 B 보다 타율이 높다. 만약 다음 경기에서 A 가 세 타석 연속 안타를 치지 못하고 B 선수는 경기가 없다면 A 와 B 의 타율 순위가 바뀐다고 할 때, A 선수가 현재 기록 중인 안타의 수는 최소 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 9 개

해설

오늘 현재 A 선수가 기록중인 안타의 수를 x 개라 하면 B 선수의 안타수는 $(x-2)$ 개 이다.

A 선수의 현재 타율은 $\frac{x}{30}$, B 선수의 현재 타율은 $\frac{x-2}{25}$ 이므로

$\frac{x}{30} > \frac{x-2}{25} \quad \therefore x < 12 \cdots ①$

다음경기에서 A 가 세 타석 연속 안타를 치지 못하고 B 선수는 경기가 없다면 B 의 타율은 변함이 없으므로

$\frac{x}{33} < \frac{x-2}{25} \quad \therefore x > 8.25 \cdots ②$

①, ② 의 공통 범위를 구하면

$8.25 < x < 12$

따라서 A 선수가 기록 중인 안타는 최소 9 개이다.

25. $a,\ b,\ c$가 양의 실수일 때, 다음 연립부등식의 해가 존재하기 위한 조건은?

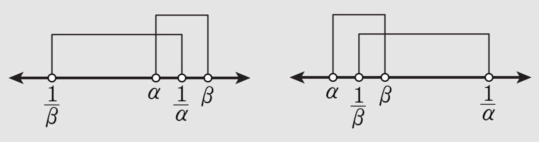
$$\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$$

① $a + c < b$ ② $a + c < 2b$ ③ $a + c < \frac{b}{2}$

④ $a + c < 1$ ⑤ $a + c < 2$

해설

$a,\ b,\ c$가 양의 실수이고 두 부등식
$ax^2 - bx + c < 0$ ⋯⋯㉠
$cx^2 - bx + a < 0$ ⋯⋯㉡의
해가 존재하려면
$ax^2 - bx + c = 0$이
서로 다른 두 실근 α, β를 가져야 한다.
그런데, 근과 계수와의 관계에서
$\alpha + \beta = \frac{b}{a} > 0,\ \alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$
($\because a,\ b,\ c$가 양의 실수)이므로
α, β는 양수이다.
따라서, $0 < \alpha < \beta$로 놓으면
㉠의 해는 $\alpha < x < \beta$ ⋯⋯㉢
㉡의 해는 $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$ ⋯⋯㉣



㉢과 ㉣이 공통 부분을 가져야 하므로
$\alpha < 1 < \beta$가 성립하고,
이 때 $f(x) = ax^2 - bx + c$로 놓으면
$f(1) < 0$
$\therefore a - b + c < 0$
$\therefore\ a + c < b$

해설

$ax^2 - bx + c < 0$ ⋯⋯①
$cx^2 - bx + a < 0$ ⋯⋯②
① + ②:
$(a + c)x^2 - 2bx + (a + c) < 0$
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$이므로 $a + c > 0$
그러므로 해가 존재하려면 판별식 $D > 0$
$\therefore \frac{D}{4} = b^2 - (a + c)^2 > 0$
$(b + a + c)(b - a - c) > 0$
여기서 $b + a + c > 0$이므로
$b - a - c > 0$이다.
$\therefore b > a + c$에서 $b > a + c$라 하면
$a + c - b < 0$
이 때, $f(x) = ax^2 - bx + c,\ g(x) = cx^2 - bx + a$라 하면
$f(1) = g(1) = a - b + c < 0$
따라서, 연립부등식 ①, ②의 해가 존재한다.