1. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D=(a+2)^2-4=0$이므로
$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$
따라서 $a=0$또는 $a=-4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

2. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

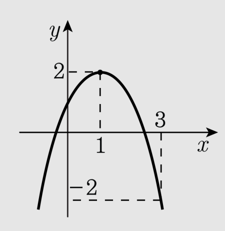
3. x의 범위가 $0 \le x \le 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



4. 방정식 $(k^2-6)x = k(x+1)+2$ 의 해가 존재하지 않을 때, k 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

x에 대하여 정리하면
$(k^2-k-6)x = k+2$
$(k+2)(k-3)x = k+2$
$k=3$ 일 때, $0\cdot x = 5$ (불능)

5. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 m이라고 할 때, m의 최댓값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$

$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$

따라서 m의 최댓값은 2 이다.

6. 지면으로부터 15m 높이에서 초속 40m 로 쏘아 올린 모형 로켓의 x 초 후의 지면으로 부터의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x + 15$ 인 관계가 성립한다. 이 로켓이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: ______ 초

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 4 초

▷ 정답: 95 m

해설

$y = -5x^2 + 40x + 15$ 에서 $y = -5(x-4)^2 + 95$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 95 를 갖는다.

7. 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 따라
합: $(1+i)+(1-i)+\alpha=3, \alpha=1 \cdots$ ㉠
곱: $(1+i)(1-i)\alpha=2\cdot(1)=-b,\ \ b=-2\cdots$ ㉡
$a=(1+i)(1-i)+1(1-i)+1(1+i)=2+1-i+1+i=4$
$a+b=4-2=2$

8. 다음은 삼차방정식 $x^3+px+1=0$의 한 근을 α라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마) 에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

> α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
> $f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=$ (가)$=$ (나) $=0$ ($\because$ ㉠)
> 따라서 $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이다. 또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$ (다)$=$ (라)$=$ (마) $=0$($\because$ ㉠)
> 따라서, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

① (가) $(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
② (나) $-(\alpha^3-p\alpha+1)$
③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0$

해설

α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$ $=-(\alpha^3+p\alpha+1)=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이다.

또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0=0$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \cdots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① − ② × 2를 계산하여 정리하면

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$, $(x+2y)(x-y) = 0$

$\therefore\ x = y,\ x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0$, $-2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$ $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

10. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$
$\therefore$ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
$\therefore$ $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는
실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$
$\therefore$ $\alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$
㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$
$\therefore$ $\alpha + \beta i = 0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

11. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$

$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$

12. 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근을 $\dfrac{1}{(1+i)^2}$이라 할 때, $f(2x+3)=0$의 두 근의 합은? (단, a, b, c는 실수)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{1}{(1+i)^2}=\dfrac{1}{1+2i-1}=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{1}{2}i$

$f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-\dfrac{1}{2}i$이면

a, b, c가 실수이므로 다른 한 근은 $\dfrac{1}{2}i$

$\therefore$ $f(x)=0$의 두 근의 합은 0

$f(2x+3)=0$의 두 근을 α, β라 하자.

$(2\alpha+3)+(2\beta+3)=0$

$2(\alpha+\beta)=-6$

$\therefore$ $\alpha+\beta=-3$

13. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$에서 한 근만이 양이기 위한 a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \le 0$ ② $0 < a \le 1$ ③ $1 < a \le 2$

④ $-2 < a \le 2$ ⑤ $-1 < a \le 2$

해설

(i) $\alpha > 0,\ \beta < 0$일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$\therefore\ -2 < a < 2$

(ii) $\alpha > 0,\ \beta = 0$일 때,

$\alpha + \beta = a > 0,\ \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$

$\therefore\ a = 2$

(i), (ii)에서 $-2 < a \le 2$

14. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$이 허근을 갖기 위한 k의 값이 될 수 없는 것은?

① -2　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$

$x=1$일때 성립하므로 $x-1$을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$(x-1)(x^2-2x+-k)=0$

허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$\therefore\ k<4$

15. 방정식 $x^2+2y^2+2xy-4x-10y+13=0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 의 합 $x+y$ 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2(y-2)x+2y^2-10y+13=0 \quad \cdots ㉠$
이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4}\geq 0$ 이다.
$\frac{D}{4}=(y-2)^2-\left(2y^2-10y+13\right)\geq 0$
$-y^2+6y-9\geq 0,\ y^2-6y+9\leq 0$
$(y-3)^2\leq 0$ y 가 실수이므로 $y-3=0$
$\therefore y=3 \quad \cdots ㉡$
㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+2x+1=0,\ (x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$
$\therefore\ x+y=-1+3=2$

16. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2-x+1=0$

$x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 를 x^2-x+1 로 직접 나누면

몫이 x^3+2x^2+2x+1 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=(x^2-x+1)(x^3+2x^2+2x+1)-x$

$\therefore\ x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=-x$ ($\because\ x^2-x+1=0$)

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2-x+1=0$ 을 만든 다음 양변에 $x+1$ 를 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$

$$\begin{aligned} x^5+x^4+x^3+x^2+1 &= -x^2-x-1+x^2+1 \\ &= -x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

17. $x^3-3x+2=0$의 한 근이 a이고, $x^2-ax+1=0$의 두 근이 $b,\ c$일 때, b^3+c^3의 값은 ?

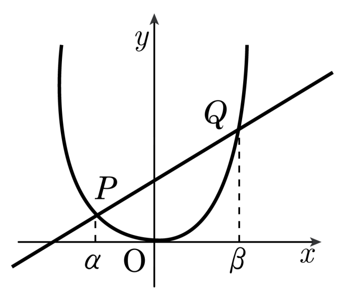
① -1　② 1　③ -2　④ 27　⑤ 0

해설

a는 $x^3-3x+2=0$의 한 근이므로
$a^3-3a+2=0$
$b,\ c$는 $x^2-ax+1=0$의 두 근이므로
$b+c=a,\ bc=1$

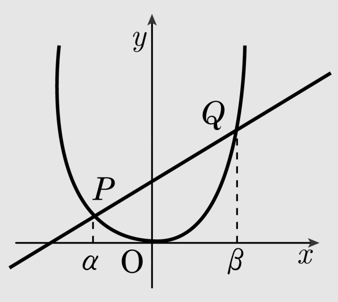
$$\begin{aligned}\therefore\ b^3+c^3 &= (b+c)^3-3bc(b+c)\\ &= a^3-3a=-2\end{aligned}$$

18. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x+3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는
$x^2 = m(x+3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = -3m$
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{\mathrm{OQ}}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$
두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1, -3m = -1$
$\therefore m = \frac{1}{3}$

19. 좌표평면 위의 두 점 $A(0,\ 2)$, $B(-4,\ 3)$ 와 직선 $y=1$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

점 P 의 좌표를 $(a,\ 1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= (a^2+1)+\{(a+4)^2+4\}\\ &= 2a^2+8a+21\\ &= 2(a+2)^2+13\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$ 일 때, 최솟값은 13 이다.

20. $x^2+3x+xy+2y-128=0$을 만족시키는 모든 양의 정수 x의 합은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

(좌변) $=(x+2)y+x^2+3x-128$

$=(x+2)y+(x+2)^2-(x+2)-130$

$=(x+2)\{y+(x+2)-1\}-130$

$\therefore\ (x+2)(x+y+1)=2\times5\times13$

$3\le x+2\le x+y+1$ 이므로

$(x+2,\ x+y+1)=(5,\ 26),\ (10,\ 13)$

$\therefore\ (x,\ y)=(3,\ 22)$ 또는 $(8,\ 4)$

$\therefore\ x$의 합은 $3+8=11$