

1. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$$D = (a+2)^2 - 4 = 0 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$$

따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$

따라서 상수 a 의 값의 합은 -4

2. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

3. x 의 범위가 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

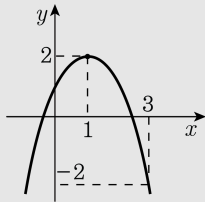
▷ 정답 : 0

해설

$$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$$

이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.

$$\therefore M + m = 2 + (-2) = 0$$



4. 방정식 $(k^2 - 6)x = k(x + 1) + 2$ 의 해가 존재하지 않을 때, k 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

x 에 대하여 정리하면

$$(k^2 - k - 6)x = k + 2$$

$$(k + 2)(k - 3)x = k + 2$$

$k = 3$ 일 때, $0 \cdot x = 5$ (불능)

5. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$$

$$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$$

따라서 m 의 최댓값은 2 이다.

6. 지면으로부터 15m 높이에서 초속 40m 로 쏘아 올린 모형 로켓의 x 초 후의 지면으로부터의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x + 15$ 인 관계가 성립한다. 이 로켓이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 4초

▷ 정답: 95m

해설

$y = -5x^2 + 40x + 15$ 에서 $y = -5(x - 4)^2 + 95$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 95 를 갖는다.

7. 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

세 근을 $1 + i, 1 - i, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 따라

합: $(1 + i) + (1 - i) + \alpha = 3, \alpha = 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

곱: $(1 + i)(1 - i)\alpha = 2 \cdot (1) = -b, b = -2 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$$a = (1 + i)(1 - i) + 1(1 - i) + 1(1 + i) = 2 + 1 - i + 1 + i = 4$$

$$a + b = 4 - 2 = 2$$

8. 다음은 삼차방정식 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (\text{가}) = (\text{나}) = 0 \quad (\because \textcircled{㉠})$
 따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다. 또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$
 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (\text{다}) = (\text{라}) = (\text{마}) = 0 \quad (\because \textcircled{㉠})$
 따라서, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

- ① (가) $(-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$ ② (나) $-(\alpha^3 - p\alpha + 1)$
 ③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$ ④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3)$
 ⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0$

해설

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$
 $= -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0 \quad (\because \textcircled{㉠})$
 따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다.
 또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$
 $= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0 = 0 \quad (\because \textcircled{㉠})$
 따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$, $y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y$, $x = -2y$ 각각을 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0$, $-2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$ 일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$$x = \alpha, y = \beta \text{라 할 때, } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

10. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

㉤ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\alpha = \bar{\beta} \text{이므로 } \beta = a - bi$$

$$\therefore \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$\therefore \alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 실수이다.

㉡ : ㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b 는

실수이므로 $a = 0, b = 0$ 즉, $\alpha = a + bi = 0$ 이다.

㉢ : (반례) $\alpha = i, \beta = 1$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$$

㉤ : (반례) $\alpha = 1, \beta = i$

$$\therefore \alpha + \beta i = 0$$

$\therefore$ ㉢, ㉤는 α, β 가 실수일 때만 성립한다.

11. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$

② $-y$

③ $2x$

④ $\frac{-x}{2}$

⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{그러므로 } \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i &= \frac{1}{2} (z - \bar{z}) i \\ &= \frac{1}{2} (x + yi - x + yi) i \\ &= \frac{1}{2} (2yi) i = -y\end{aligned}$$

12. 이차방정식 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근을 $\frac{1}{(1+i)^2}$ 이라 할 때,
 $f(2x+3) = 0$ 의 두 근의 합은? (단, a, b, c 는 실수)

① -5

② -3

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1+2i-1} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근이 $-\frac{1}{2}i$ 이면

a, b, c 가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{1}{2}i$

$\therefore f(x) = 0$ 의 두 근의 합은 0

$f(2x+3) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자.

$$(2\alpha+3) + (2\beta+3) = 0$$

$$2(\alpha+\beta) = -6$$

$$\therefore \alpha+\beta = -3$$

13. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 에서 한 근만이 양이기 위한 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \leq 0$

② $0 < a \leq 1$

③ $1 < a \leq 2$

④ $-2 < a \leq 2$

⑤ $-1 < a \leq 2$

해설

(i) $\alpha > 0, \beta < 0$ 일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$\therefore -2 < a < 2$

(ii) $\alpha > 0, \beta = 0$ 일 때,

$\alpha + \beta = a > 0, \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$

$\therefore a = 2$

(i), (ii)에서 $-2 < a \leq 2$

14. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$ 이 허근을 갖기 위한 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0 \text{에서 } x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$$

$x=1$ 일때 성립하므로 $x-1$ 을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$$(x-1)(x^2-2x+5-k)=0$$

허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$ 의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$$\therefore k<4$$

15. 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 10y + 13 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$$\frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0, \quad y^2 - 6y + 9 \leq 0$$

$$(y-3)^2 \leq 0 \quad y \text{ 가 실수이므로 } y-3=0$$

$$\therefore y=3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (x+1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

$$\therefore x+y = -1+3 = 2$$

16. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱

해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면

몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$

$\therefore x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= -x (\because x^2 - x + 1 = 0)$

$= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x + 1$ 를 곱하면

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$

$= -x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

17. $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 이고, $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 b, c 일 때, $b^3 + c^3$ 의 값은 ?

① -1

② 1

③ -2

④ 27

⑤ 0

해설

a 는 $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이므로

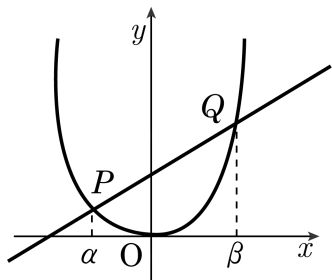
$$a^3 - 3a + 2 = 0$$

b, c 는 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$b + c = a, \quad bc = 1$$

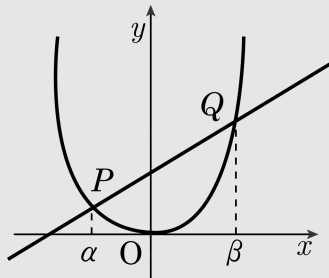
$$\begin{aligned}\therefore b^3 + c^3 &= (b + c)^3 - 3bc(b + c) \\ &= a^3 - 3a = -2\end{aligned}$$

18. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x + 3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는

$x^2 = m(x + 3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = -3m$

$\overline{OP}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{OQ}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$

두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1$, $-3m = -1$

$$\therefore m = \frac{1}{3}$$

19. 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 2)$, $B(-4, 3)$ 와 직선 $y = 1$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

점 P 의 좌표를 $(a, 1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (a^2 + 1) + \{(a + 4)^2 + 4\} \\ &= 2a^2 + 8a + 21 \\ &= 2(a + 2)^2 + 13\end{aligned}$$

따라서 $a = -2$ 일 때, 최솟값은 13이다.

20. $x^2 + 3x + xy + 2y - 128 = 0$ 을 만족시키는 모든 양의 정수 x 의 합은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= (x+2)y + x^2 + 3x - 128 \\&= (x+2)y + (x+2)^2 - (x+2) - 130 \\&= (x+2)\{y + (x+2) - 1\} - 130\end{aligned}$$

$$\therefore (x+2)(x+y+1) = 2 \times 5 \times 13$$

$3 \leq x+2 \leq x+y+1$ 이므로

$$(x+2, x+y+1) = (5, 26), (10, 13)$$

$$\therefore (x, y) = (3, 22) \text{ 또는 } (8, 4)$$

$$\therefore x \text{의 합은 } 3 + 8 = 11$$