1. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

2. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D=(a+2)^2-4=0$이므로
$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$
따라서 $a=0$또는 $a=-4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

3. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$ 이면 다른 한 근은 $1-2i$ 이다.
(두 근의 합) $= (1+2i) + (1-2i) = -a$ ……㉠
(두 근의 곱) $= (1+2i)(1-2i) = b$ ……㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡에서
$a = -2,\ b = 5$ 이다.

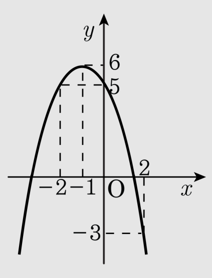
4. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2\le x\le 2\ )$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$



점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.
$f(-2)=5, f(2)=-3$
따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며
최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.
$\therefore\ M+m=6-3=3$

5. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \le x < 2$일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2} - 1$　② $\sqrt{2} + 1$　③ $\sqrt{3} + 2$

④ $\sqrt{3} - 1$　⑤ $\sqrt{3} - 2$

해설

(ⅰ) $0 \le x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$-4x - 1 = 0$

$\therefore\ x = -\frac{1}{4}$(부적합)

(ⅱ) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$4x^2 - 4x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

$1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

$\therefore\ 2\alpha = \sqrt{2} + 1$

6. 두 곡선 $y = x^2$과 $y = -x^2 + 2x - 5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면
$y' = 2x$이므로 $y'_{x=t} = 2t$는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots$ ㉠
㉠이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$에도 접하므로
$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
$x^2 + 2(t - 1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots$ ㉡
㉡의 판별식 $\dfrac{D}{4} = 0$이므로
$(t - 1)^2 - (5 - t^2) = 0$에서
$(t + 1)(t - 2) = 0 \qquad \therefore\ t = -1,\ 2$
㉠에서
$t = -1$일 때, $y = -2x - 1$
$t = 2$일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

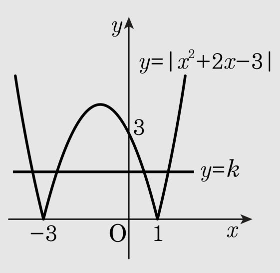
7. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$　　② $k > 4$　　③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$　　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은
두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의
그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0<k<3$



8. 이차함수 $y=-x^2+4ax+a-2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{33}{16}$

해설

$y=-x^2+4ax+a-2$
$=-(x^2-4ax)+a-2$
$=-(x-2a)^2+4a^2+a-2$

최댓값 $M=4a^2+a-2$
$=4\left(a^2+\frac{1}{4}a\right)-2$
$=4\left(a+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{16}-2$
$=4\left(a+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{33}{16}$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

9. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$으로 놓으면

$f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ 이므로, 조립제법에 의하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$

$= (x-1)(x+2)(x-3)$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 3$

10. x에 관한 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-3+2+4=4$

11. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, $\frac{w^{102} + w^{101}}{w^{100}} + \frac{w^{99}}{w^{101} + w^{100}}$ 을 계산하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^2 + \omega = -1$

$\frac{\omega^{102} + \omega^{101}}{\omega^{100}} + \frac{\omega^{99}}{\omega^{101} + \omega^{100}}$

$= \frac{\omega^2 + \omega}{1} + \frac{1}{\omega^2 + \omega}$

$= -1 - 1 = -2$

12. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4 + a(\sqrt{2}+i)^3 + b(\sqrt{2}+i)^2 + c(\sqrt{2}+i) + d = 0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4 = -7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3 = -\sqrt{2}+5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2 = 1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

13. n이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2　② $-\sqrt{2}$　③ 0　④ 2　⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$
$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

14. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

15. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① -10　② -12　③ -14　④ -16　⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2-9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2$, $c=8$ 이다.

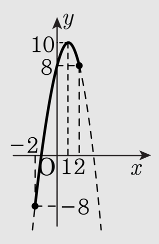
$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

16. $2x^2+y^2=8$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $4x+y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$2x^2+y^2=8$ 에서
$y^2=8-2x^2$ 으로 놓으면
$y^2=8-2x^2\geq 0, x^2-4\leq 0$
$\therefore -2\leq x\leq 2$
이 때, $y^2=8-2x^2$ 을 $4x+y^2$ 에 대입하면
$4x+y^2=4x+(8-2x^2)^2=-2(x-1)^2+10$
여기서 $f(x)=4x+y^2=-2(x-1)^2+10$
이라고 하면 $-2\leq x\leq 2$ 이므로
다음 그림에서 $x=1$ 일 때
$f(x)$ 의 최댓값은 10
$x=-2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2-1)^2+10=-8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10+(-8)=2$

17. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$의 한근이 $1 + 2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x = 1+2i,\ \ x^2 = -3+4i,\ \ x^3 = -11-2i,\ \ x^4 = -7-24i,$
$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$
$= (-7-24i) + a(-11-2i) + b(-3+4i) + 14(1+2i) + 15 = 0,$
$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$
$\therefore 11a + 3b = 22,\ -2a + 4b = -4$
연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$
$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면
$a = k - 2,\ b = 8 - 2k,\ 14 = 5k - 6$
$\therefore\ k = 4,\ a = 2,\ b = 0$

18. 사차방정식 $x^4+5x^3+ax^2+bx-5=0$이 $x=-1+\sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x=-1+\sqrt{2}$에서 $x+1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$

$\therefore x^4+5x^3+ax^2+bx-5=(x^2+2x-1)(x^2+cx+5)$

$=x^4+(2+c)x^3+(4+2c)x^2+(10-c)x-5$

$\therefore\ 2+c=5,\ 4+2c=a,\ 10-c=b$

$\therefore\ a=10,\ b=7,\ c=3$

19. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 - (a+2)t + \dfrac{a^2+1}{4} = 0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D = (a+2)^2 - 4 \times \dfrac{a^2+1}{4} \geq 0$

$4a+3 \geq 0$

$\therefore\ a \geq -\dfrac{3}{4}$

20. a, b가 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$중 하나일 때, 등식 $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 조건은

i) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ii) $a-b<0$ 이고 $a+b>0$

i) 의 경우 $(-2,\ 2)$ $(2,\ -2)$ $(-1,\ 1)$ $(1,\ -1)$

ii) 의 경우 $(-1,\ 2)$ $(0,\ 2)$ $(0,\ 1)$ $(1,\ 2)$

$\therefore$ 모두 8개

21. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$ 라 할 때, $f(x, y) = 0$ 이 두 개의 직선을 나타내도록 k 의 값을 정하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x,\ y) = x^2 + (y+2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$
주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면
$x,\ y$ 에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로
근의 공식에서 근호 안의 식 $(= D)$ 이 완전제곱꼴이어야 한다.
$D = (y+2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$
$\quad = 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots (\text{i})$
(ⅰ) 이 완전제곱식이어야 하므로
(ⅰ) 의 판별식
$\frac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$
$108 + 36k = 0 \quad \therefore\ k = -3$

22. x에 대한 방정식 $x^2-2px+p+2=0$의 모든 근의 실수부가 음이 되도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-2<p<0$　② $-2\le p<0$　③ $-2<p\le 0$
④ $-2\le p\le 0$　⑤ $0\le p<2$

해설

$x^2-2px+p+2=0$의 근은
$x=p\pm\sqrt{p^2-p-2}\cdots\cdots$㉠
(ⅰ) ㉠이 실근일 때
$p^2-p-2\ge 0,\ 2p<0,\ p+2>0$
$\therefore\ -2<p\le -1$
(ⅱ) ㉠이 허근일 때
$p^2-p-2<0$이고 $p<0$
$\therefore\ -1<p<0$
이상에서 구하는 p의 조건은 $-2<p<0$

23. 네 함수 $F(x) = x^2 + 4x + 9$, $G(x) = x^2 - 6x + 4$, $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = cx + d$ 가 있다. $F(x)$ 와 $G(x)$ 가 최솟값을 갖게 되는 x 값들이 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 x 좌표값일 때, 함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 가 최솟값을 갖게되는 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

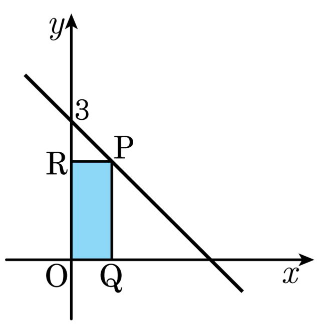
해설

$F(x) = x^2+4x+9 = (x+2)^2+5$, $G(x) = x^2-6x+4 = (x-3)^2-5$
이므로 각각의 함수는 $x = -2,\ x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖는다.
따라서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 -2와 3 이므로
$x^2 + ax + b = cx + d$,
즉 $x^2 + (a-c)x + (b-d) = 0$ 은 두 근이 $-2,\ 3$ 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a - c = -1,\ b - d = -6$

$$\begin{aligned} \therefore\ h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^2 + (a-c)x + (b-d) \\ &= x^2 - x - 6 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 $h(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

24. 다음 그림과 같이 직선이 $y = -x + 3$ 의 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에서 내릴 수선의 발이 각각 Q, R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 y 라고 한다. y 가 최대가 될 때, 점 P 의 좌표는?



① $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ ② $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+3)$ 이고 넓이는 y 이므로

$y = a(-a+3) = -a^2 + 3a$

$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4}$

$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + 3\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

25. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α를 가질 때, $a+b+c+\alpha$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 & \cdots ① \\ b\alpha^2+c\alpha+a=0 & \cdots ② \\ c\alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ : $(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

$\therefore\ a+b+c=0$

① $\times\,\alpha$ − ② : $a(\alpha^3-1)=0$,

$a\neq 0$이고 α는 실수이므로 $\alpha=1$

$\therefore\ a+b+c+\alpha=1$