1. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$

이것은 k에 대한 항등식이므로

$2x+3y+5=0$

$3x-y-9=0$

연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$

$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

2. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4 \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

3. 다항식 x^3+ax^2+bx-1이 x^2-3x+2로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ 로 놓으면

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.

$f(1)=1+a+b-1=0$ 즉, $a+b=0\cdots$ ㉠

$f(2)=8+4a+2b-1=0$ 즉, $4a+2b=-7\cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터 $a=-\frac{7}{2}$, $b=\frac{7}{2}$

$\therefore a+b=0$

4. $x^4+3x^2+4=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2+2)^2-x^2\\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

5. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A\triangle B = 2A + B$, $A\blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A\blacktriangledown(B\triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$A\blacktriangledown(B\triangle A) = A\blacktriangledown(2B + A)$$
$$= A - 3(2B + A) = -2A - 6B$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

6. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R
③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R
⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

7. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3 ② 3^3-3^4 ③ 0

④ 1 ⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

8. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 값을 정하면?

① $a = 3\ b = 7\ ,\ c = -4\ ,\ d = 4$

② $a = 3\ b = 9\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

③ $a = 2\ b = 9\ ,\ c = 6\ ,\ d = 4$

④ $a = 1\ b = 3\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

⑤ $a = 2\ b = -9\ ,\ c = 6\ ,\ d = 4$

해설

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 & & \\
 & & 3 & 3 & 2 & & \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ a = 3\ ,\ b = 9\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

(ii) x 대신 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면,

$x = 0$ 대입 : $2 = -a + b - c + d \cdots$ ①

$x = -1$ 대입 : $0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots$ ②

$x = 1$ 대입 : $4 = d\ \ \cdots\cdots$ ③

$x = 2$ 대입 : $24 = a + b + c + d \cdots$ ④

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

9. $\dfrac{100^3-1}{101\times 100+1}$ 의 값을 구하면?

① 99 ② 100 ③ 101 ④ 102 ⑤ 103

해설

$a=100$ 이라 하면

$$\frac{a^3-1}{(a+1)a+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)}$$
$$=a-1=99$$

10. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$x+y+z=1$을 변형하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (1-z)(1-x)(1-y)\\ &= 1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz\\ &= 1-1+2-3=-1\end{aligned}$$

11. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$ 의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $m = 6$

해설

$f(x) = (x+2)(x-1)$
$g(x) = (x+2)(2x-1)$ 이므로
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$
이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로
$h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$
$\therefore\ m = 6$

12. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned}P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)\\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= \quad \vdots\\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1)\\ &= 2^{32}-1\end{aligned}$$

13. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$　② 0　③ $3^{2007}+1$

④ 1　⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

14. x^{30}을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$ ② $3^{30}-1$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$

④ $\frac{1}{3}(3^{30}-1)$ ⑤ 0

해설

$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+R$

양변에 $x=3$을 대입 하면, $3^{30}=R$

$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+3^{30}$

양변에 $x=1$을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}(3^{30}-1)$

※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

15. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0,\ g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$ ② $x-1$ ③ $-x+1$

④ $-x-1$ ⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면

$$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$$

$$g(\sqrt{2}+1)=f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b$$

$$=a(\sqrt{2}+1)+b\ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0)$$

$$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a=1,\ b=1$$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$

16. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$

$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$

$=(x-y)(x+y+1)^2$

$p=-1, q=1, r=1$

$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

17. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고
차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$\therefore$ (준식) $= a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - b^2c^3 + c^3a^2 - c^2a^3$

$= (b^2-c^2)a^3 - (b^3-c^3)a^2 + b^2c^2(b-c)$

$= (b-c)\{(b+c)a^3 - (b^2+bc+c^2)a^2 + b^2c^2\}$

$= (b-c)\{(c^2-a^2)b^2 - a^2(c-a)b - a^2c(c-a)\}$

$= (b-c)(c-a)\{(c+a)b^2 - a^2b - a^2c\}$

$= (b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)c + ab(b-a)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)\{(b+a)c+ab\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

18. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형
② 직각삼각형
③ 이등변삼각형
④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90°$인 직각삼각형

19. 두 다항식 x^2+3x+p, x^2+px+q의 최소공배수가 $x^3-13x+12$일 때, $p+q$의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.
$(\because\ AB=GL)$

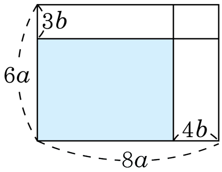
ⅰ) G.C.M. $=x-1$이면 $p=-4,\ q=3$
이 때 두 식은 $(x-1)(x+4),\ (x-1)(x-3)$이므로 조건에 맞는다.

ⅱ) G.C.M. $=x-3$이면 $p=-18,\ q=45$
이 때 두 식은 $(x-3)(x+6),\ (x-3)(x-15)$이므로 조건에 맞지 않는다.

ⅲ) G.C.M. $=x+4$일 때도 ⅱ)와 같음

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $p+q=-1$

20. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2-7ab+2b^2$

② $36a^2-42ab+12b^2$

③ $48a^2-48ab+12b^2$

④ $12a^2-12ab+3b^2$

⑤ $48a^2+48ab+12b^2$

해설

$(6a-3b)(8a-4b)=48a^2-48ab+12b^2$

21. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots①$

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots②$

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

22. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69　② 70　③ 71　④ 72　⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

23. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n+n\alpha x^{n-1}+\cdots+\alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
$f(x+1)-f(x-1)$
$=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}+\cdots+a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
$=\boxed{\quad}x^{n-1}+\cdots=6x^2+6$
에서 $n=3$, $a_n=1$
$\therefore\ f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+1$
$f(x+1)-f(x-1)=6x^2+4a_2x+2+2a_1$
이므로 $a_2=0$, $a_1=2$ 즉, $f(x)=x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{\quad}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$=a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\}+a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$
$=a_n(2nx^{n-1}+\cdots)+a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$
$=2na_nx^{n-1}+\{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1}=6x^2$ 에서
$n-1=2$, $2na_n=6$
$\therefore\ n=3$, $a_n=1$

24. x^{100}을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$ ② $100x-99$ ③ $-100x-99$

④ $-99x-98$ ⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

x^{100}을 $x+1$로 나누면 나머지는 1이므로

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ $(\Rightarrow a+1=b)$

$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$

$a=-100$, $a+1=b$에서 $b=-99$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

25. 두 다항식 x^2-x+p 와 $x^3+x^2+x+(p+3)$ 이 사차의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

다항식 A, B 의 최소공배수를 L , 최대공약수를 G 라 하면
$AB=GL$ 에서 G 는 1차식이다.
$\therefore$ 최대공약수는 $x+1$
$x=-1$ 을 대입하면
$2+p=0$
$\therefore\ p=-2$