1. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동시켰을 때 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

① $(0,0)$　② $(0,-2)$　③ $(3,0)$

④ $(0,3)$　⑤ $(-2,0)$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동 시켰으므로 $y = 2x^2 + 3$ 이다.
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 3)$ 이다.

2. 이차함수 $y=(x+2)^2+3$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선의 식은?

① $y=(x-2)^2+3$

② $y=(x-2)^2-3$

③ $y=-(x+2)^2-3$

④ $y=-(x+2)^2+3$

⑤ $y=(x+2)^2+3$

해설

x 축 대칭이므로 y 대신에 $-y$ 를 대입하면
$y=-(x+2)^2-3$ 이다.

3. 다음 이차함수의 그래프 중 x 축과 두 점에서 만나는 것은?

① $y = 2x^2 + 3$

② $y = -2x^2 - 3$

③ $y = x^2 - 2x + 1$

④ $y = -x^2 + 4x$

⑤ $y = -x^2 + 6x - 10$

해설

$$y = -(x^2 - 4x + 4) + 4$$
$$= -(x-2)^2 + 4$$

꼭짓점이 1 사분면에 있고 위로 볼록하므로 x 축과 두 점에서 만난다.

4. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 조건을 만족할 때, 상수 b 의 값을 구하여라.

(가) 상수 $m,\ n$ 에 대하여 $m - n = 6$ 이다. (나) 두 점 $(1,\ m)$ 과 $(-1,\ n)$ 을 지난다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 점 $(1,\ m)$ 과 $(-1,\ n)$ 을 함수식에 대입하면 $m = a+b+c,\ \ n = a - b + c$

두 식을 연립하여 풀면 $m - n = 2b$, $m - n = 6$ 이므로 $2b = 6 \quad \therefore\ b = 3$

5. 다음 포물선을 폭이 좁은 것부터 차례로 기호로 나열한 것은?

(가) $y = -x^2$	(나) $y = -5x^2$
(다) $y = -\frac{1}{2}x^2$	(라) $y = -\frac{5}{4}x^2$

① (가)-(나)-(다)-(라) ② (나)-(라)-(가)-(다) ③ (다)-(나)-(가)-(라)

④ (나)-(가)-(라)-(다) ⑤ (라)-(나)-(다)-(가)

해설

$y = ax$ 에서 a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

6. 이차함수 $y = 3(x+1)^2 + q$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나기 위한 상수 q 의 범위는?

① $q < -1$　　② $q < -2$　　③ $q < -3$

④ $q < -4$　　⑤ $q < -5$

해설

꼭짓점은 $(-1,\ q)$ 로 아래로 볼록한 그래프이다.
모든 사분면을 지나려면 $3 + q < 0$ 이어야 한다.
$\therefore q < -3$

7. 이차함수 $y=2x^2-4x+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면 $y=2x^2+mx+n$ 의 그래프가 된다. 이 때, m^2+n^2 의 값은?

① 36　② 25　③ 16　④ 9　⑤ 4

해설

$y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$

$y=2(x-1+1)^2-1+3=2x^2+2$

$\therefore\ m=0,\ n=2$

$\therefore\ m^2+n^2=0^2+2^2=4$

8. $y = -2x^2 - 4x + 10$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x의 값의 범위는?

① $x > 1$ ② $x < 1$ ③ $x > 0$

④ $x > -1$ ⑤ $x < -1$

해설

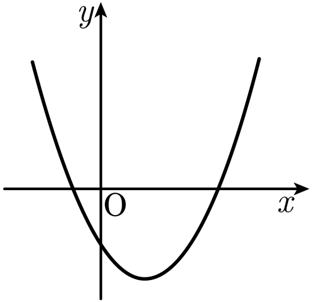
$$y = -2x^2 - 4x + 10$$
$$= -2(x+1)^2 + 12$$

위로 볼록한 모양의 포물선이고 축의 방정식 $x = -1$ 이므로

따라서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 값의 범위는

$\{x \mid x > -1\}$ 이다.

9. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a, b, c의 부호는?



① $a>0, b>0, c>0$

② $a>0, b>0, c<0$

③ $a>0, b<0, c<0$

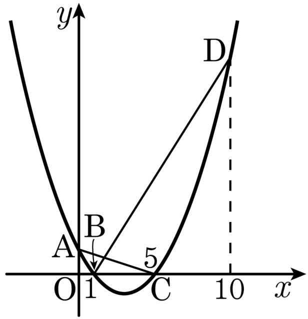
④ $a<0, b>0, c>0$

⑤ $a<0, b<0, c<0$

해설

$a>0, c<0$이고 $ab<0$이므로 $b<0$이다.

10. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하면?



① 106 ② 107 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5-1) \times c = 12$ 이다.

$c = 6$, 즉 $A(0,6)$ 이다.

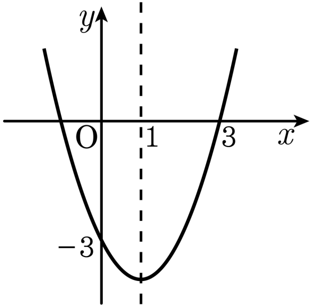
$y = ax^2 + bx + 6 = a(x-1)(x-5) = ax^2 - 6ax + 5a$ 이다.

$5a = 6$, $a = \frac{6}{5}$, $b = -\frac{36}{5}$ 이다.

$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6$ 이므로 $D(10, 54)$ 이다.

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 54 = 108$

11. 다음 그림은 직선 $x=1$ 을 축으로 하는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프이다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?



① -4 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$y=a(x-1)^2+q$

$x=0$ 일 때, $a+q=-3$ $\cdots\cdots(1)$

$x=3$ 일 때, $4a+q=0$ $\cdots\cdots(2)$

(2) 에서 (1) 을 빼면, $3a=3$

$\therefore\ a=1,\ q=-4$

$y=(x-1)^2-4=x^2-2x-3$

따라서 $x=1$ 일 때, $y=a+b+c=-4$ 이다.

12. 세 점 $(-1,\ -5)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$ 일 때, $p-q$ 의 값은?

① 1　② 5　③ -5　④ -1　⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라고 놓으면
$(-1,-5)$를 지나므로 $-5=a-b+5$
$(0,5)$를 지나므로 $5=c$
$(2,13)$ 을 지나므로 $13=4a+2b+5$
$\therefore a=-2,\ b=8,\ c=5$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-2x^2+8x+5=-2(x-2)^2+13$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 13)$ 이므로
$p-q=-11$ 이다.

13. $x = 2$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = a(x-2)^2 - 1$$
$$= a(x^2 - 4x + 4) - 1$$
$$= ax^2 + 4ax + 4a - 1$$

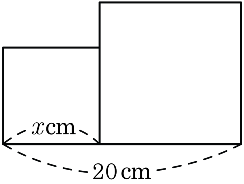
$4a - 1 = 3$

$a = 1$

$y = (x-2)^2 - 1$

$apq = 1 \times 2 \times (-1) = -2$

14. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 10 cm

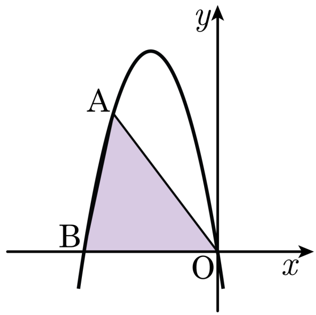
해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,
넓이를 y 라고 하면

$$y = x^2 + (20 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 400$$
$$= 2(x - 10)^2 + 200$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

15. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?

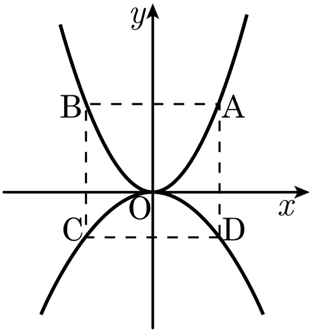


① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

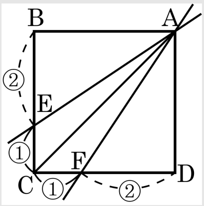
축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times 9=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$

16. 두 함수 $y=x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$과 정사각형 ABCD에 대하여 점 A를 지나고 정사각형 ABCD의 넓이를 3등분하는 두 개의 직선의 기울기의 곱을 구하면?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ $\frac{1}{3}$

해설



위의 그림에서 A점의 x좌표를 구하면

$2a=\frac{3}{2}a^2,\ a=\frac{4}{3}$

$\therefore$ A$\left(\frac{4}{3},\ \frac{16}{9}\right)$

정사각형의 넓이는 $(2a)^2=\frac{64}{9}$이므로 넓이가 삼등분되면 각 넓이는

$\frac{64}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{64}{27}$에서

$\frac{64}{27}=\frac{8}{3}\times②\times\frac{1}{2}$

$②=\frac{16}{9}$

직선 AF의 기울기는 $\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{9}}=\frac{3}{2}$

마찬가지 방법으로 AE의 기울기를 구하면 $\frac{2}{3}$

$\therefore$두 기울기의 곱은 $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$

17. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나고, 이 그래프와 원점에 대하여 대칭인 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 4)$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$

원점 대칭하면 $(-p,\ -q) = (-2,\ 4)$

$\therefore\ p = 2,\ q = -4$

$y = a(x-2)^2 - 4$ 의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2 = a(1-1)^2 - 4$

$\therefore\ a = 6$

18. 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 10$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 42가 되는 모든 k의 값의 합을 구하여라. (단, $0 < k < \sqrt{10}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{10}$

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 - 10 = (x-k)^2 - 10$

$\therefore$ A$(k,\ -10)$, B$(0,\ k^2 - 10)$

$x^2 - 2kx + k^2 - 10 = 0$ 에서 $x = k \pm \sqrt{10}$

$\therefore$ C$(k - \sqrt{10},\ 0)$, D$(k + \sqrt{10},\ 0)$

원점을 O 라 하면 $k > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ \square\mathrm{ABCD} &= \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{ABO} + \triangle\mathrm{AOD} \\ &= \frac{1}{2} \times (-k + \sqrt{10})(-k^2 + 10) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (-k^2 + 10) \times k \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (k + \sqrt{10}) \times 10 = 42\end{aligned}$$

이 식을 정리하면 $-\sqrt{10}k^2 + 10k + 20\sqrt{10} - 84 = 0$

따라서 k 의 모든 값의 합은 $\sqrt{10}$ 이다.

19. 이차함수 $y = 2x^2 - ax - b$ 는 $x = -p$ 일 때, 최솟값 -2를 갖고, 그 그래프는 점 $(1, p^2)$ 을 지난다. 이때, 상수 a , b , p 의 합 $a+b+p$ 의 값을 구하면? (단, $p < 0$)

① 12 ② 0 ③ -18 ④ 42 ⑤ -14

해설

$$y = 2(x+p)^2 - 2$$

$$\begin{aligned} p^2 &= 2(1+p)^2 - 2 \\ &= 2(p^2 + 2p + 1) - 2 \\ &= 2p^2 + 4p \end{aligned}$$

$p^2 + 4p = 0,\ p(p+4) = 0,\ p = 0,\ \ -4$

$\therefore\ \ p = -4(\because p < 0)$

$$\begin{aligned} y &= 2(x-4)^2 - 2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 2x^2 - 16x + 30 \end{aligned}$$

$a = 16$, $b = -30$

$\therefore a + b + p = 16 + (-30) + (-4) = -18$

20. 이차함수 $y = x^2 - 2px + 2p^2 - 4p + 2$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2px + 2p^2 - 4p + 2$

$= (x - p)^2 + p^2 - 4p + 2$ 이므로

$m = p^2 - 4p + 2 = (p - 2)^2 - 2$

따라서 $p = 2$ 일 때, 최솟값 -2 를 갖는다.