1. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

2. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x]+1)(2[x]+1) = 0$이므로

$[x] = -1$ 또는 $[x] = -\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x] = -1$

$\therefore -1 \le x < 0$

3. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \leq x < 2$일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2}-1$　② $\sqrt{2}+1$　③ $\sqrt{3}+2$

④ $\sqrt{3}-1$　⑤ $\sqrt{3}-2$

해설

(ⅰ) $0 \leq x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로
$-4x - 1 = 0$
$\therefore\ x = -\frac{1}{4}$(부적합)
(ⅱ) $1 \leq x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$4x^2 - 4x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
$1 \leq x < 2$이므로 $x = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$
$\therefore\ 2\alpha = \sqrt{2}+1$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 10x + m^2 - 2m = 0$의 두 근의 비가 $2 : 3$일 때, m의 값은? (단, $m > 1$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

한 근을 2α라고 하면 다른 한 근은 3α이다
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2\alpha + 3\alpha = 5\alpha = 10,\ \alpha = 2$
$\therefore\ (2\alpha) \times (3\alpha) = 6\alpha^2 = m^2 - 2m$
$\therefore\ m^2 - 2m - 24 = 0$
$(m + 4)(m - 6) = 0 \quad \therefore\ m = 6\ (\because\ m > 1)$

5. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$이면 $x = i$로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0 < k < 1$이면 $-1 < -1 + k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

6. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} > 0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$일 때 중근)

7. x에 대한 실수 계수의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$로 잘못 기억하고 풀어 두 근이 -1, 2를 얻었다. 이 방정식을 바르게 풀 때, 두 근의 합은?

① 0 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

잘못 기억한 근의 공식에서

두 근을 합하면 $-\dfrac{2b}{a}$이므로

$-\dfrac{2b}{a}=-1+2=1$이다.

따라서 준 식은 $-2bx^2+bx+c=0$이 되고

따라서 (두근의 합)$=-(-\dfrac{b}{2b})=\dfrac{1}{2}$

8. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$ 로 나타낸다. $\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$　　② $3+3i$　　③ $2+3i$

④ $1+3i$　　⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai) \\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4 \\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4 \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

9. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

10. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면
$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=3k-11$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$
따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$이므로
$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$
$\therefore\ k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

11. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28$, $c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6$, $b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6