1. 다음 이차방정식 중 해가 없는 것은?

① $x^2 - 6x - 2 = 0$

② $x^2 - 3x - 4 = 0$

③ $2x^2 - 2x + 2 = 0$

④ $2x^2 - 4x + 2 = 0$

⑤ $x^2 - x - 12 = 0$

해설

③ $D = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 2 < 0$: 해가 없다.

2. $x^2 - 8x + 4 = 2x - 3a^2$ 가 중근을 갖게 하는 a 의 값은?

① -7 ② -5 ③ 7 ④ 5 ⑤ $\pm\sqrt{7}$

해설

$x^2 - 10x + (4 + 3a^2) = 0$ 이 중근을 가지려면

$D = (-10)^2 - 4(4 + 3a^2) = 0$

$\therefore\ a = \pm\sqrt{7}$

3. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha+\beta)^2=A$, $(\alpha-\beta)^2=B$ 이다. $A+B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로, $(\alpha+\beta)^2=A=9$ 이다.

곱셈 공식에서

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 이므로

$(\alpha-\beta)^2=(3)^2-4\times\left(\frac{1}{2}\right)=7$

$B=7$ 이다.

따라서 $A+B=9+7=16$ 이다.

4. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근의 합이 $x^2 - 4x + k = 0$ 의 한 근일 때, 상수 k 의 값은?

① -12 ② -4 ③ 2 ④ 4 ⑤ 12

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근의 합은 2

$x = 2$ 를 $x^2 - 4x + k = 0$ 에 대입하면

$4 - 8 + k = 0$

$\therefore k = 4$

5. 차가 4인 두 자연수가 있다. 곱이 96일 때, 두 수의 합은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

두 자연수를 x, $x+4$라 하면

$x(x+4)=96$

$x^2+4x-96=0$

$(x-8)(x+12)=0$

$\therefore\ x=8(\because x>0)$

따라서 두 수의 합은 $8+12=20$이다.

6. 책을 펼쳐서 나타난 쪽수의 곱이 156 이었을 때, 뒷 쪽의 쪽수를 구하여라.

▶ 답 : 쪽

▷ 정답 : 13 쪽

해설

펼쳐진 책의 쪽수를 $x-1,\ x$라 하면

$(x-1)x = 156$

$(x-13)(x+12) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 13$ (쪽)

7. 지상으로부터 30m 인 지점에서 1 초에 15m 의 빠르기로 던져올린 공의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -5t^2 + 15t + 30$ 인 관계가 성립한다. 발사 후 3 초 후의 높이를 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\text{m}}$

▷ 정답 : $30\,\underline{\text{m}}$

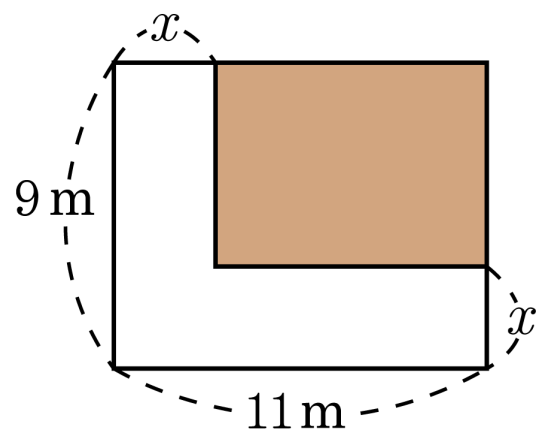
해설

$h = -5t^2 + 15t + 30$ 에서 $t = 3$ 을 대입하면

$h = -45 + 45 + 30 = 30$

따라서 발사 후 3초 후의 높이는 30m 이다.

8. 가로, 세로의 길이가 각각 11 m, 9 m 인 직사각형 모양의 땅에 다음 그림과 같이 세로로 x m, 가로로 x m 의 길을 내어 남은 땅의 넓이가 48 m^2 가 되도록 할 때, x 의 값은?



① 1 m ② 2 m ③ 3 m

④ 4 m ⑤ 5 m

해설

$(11-x)(9-x)=48$

$x^2-20x+51=0$

$(x-3)(x-17)=0$

$x<9$ 이므로 $x=3$(m)

9. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은?

$ax^2+bx+c=0$
$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
$x^2+\frac{b}{a}x+①=-\frac{c}{a}+①$
$(x+②)^2=③$
$x=④\pm⑤$

① $\frac{b^2}{4a^2}$ ② $\frac{b}{2a}$ ③ $\frac{b^2-4ac}{2a}$
④ $-\frac{b}{2a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

해설

$ax^2+bx+c=0$ ← 양변을 a 로 나눈다.
$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ ← 양변에 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$ 을 더한다.
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
∴ ③이 잘못되었다.

10. 이차방정식 $3x^2 - 16x - ax + 4a + 15 = 0$ 이 정수의 근을 가질 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

▷ 정답 : $a = 10$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면 $-a(x-4)+3x^2-16x+15=0$ 이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{3x^2 - 16x + 15}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(3x-4)-1}{x-4} \\ &= 3x - 4 - \frac{1}{x-4} \end{aligned}$$

a 는 정수이므로 $x - 4 = \pm 1$ 이다.

$x = 3$ 또는 $x = 5$ 이므로

(i) $x = 3$ 일 때, $a = 6$

(ii) $x = 5$ 일 때, $a = 10$ 이다.

11. $(x-4)(x+2) = -2x(x-4)$의 해가 α, β 일 때, $3\alpha\beta$의 값은?

① -5 ② -8 ③ 3 ④ 5 ⑤ 8

해설

주어진 방정식을 정리하면

$3x^2 - 10x - 8 = 0$

$(3x+2)(x-4) = 0$

$\alpha = 4,\ \beta = -\frac{2}{3}$ 또는 $\alpha = -\frac{2}{3},\ \beta = 4$

$\therefore\ 3\alpha\beta = -8$

12. 다음과 같은 방정식에서 $2y-3x$ 의 값을 구하여라. (단, $x \neq -y$)

$$\frac{3(x+1)^2-2(1-y)^2}{2(x+1)(1-y)}=\frac{1}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x+1=X,\ 1-y=Y$ 로 치환하면

$3X^2-XY-2Y^2=0$

$(3X+2Y)(X-Y)=0$

i) X = Y 일 때

$x+1=1-y$

$x=-y$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

ii) 3X = −2Y 일 때

$3(x+1)=-2(1-y)$

$3x-2y=-5$

$\therefore\ 2y-3x=-(-5)=5$

13. $(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-3)-2=0$ 일 때, x^2+y^2 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x^2+y^2=1$

▷ 정답: $x^2+y^2=4$

해설

$x^2+y^2=A$ 라고 하면

$(A-2)(A-3)-2=0$

$A^2-5A+4=0$

$(A-1)(A-4)=0$

$A=1$ 또는 $A=4$

$\therefore x^2+y^2=1$ 또는 $x^2+y^2=4$

14. $2x^2+3x-4=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{3}{2}}{-2}=\frac{3}{4}$

15. 이차방정식 $x^2 + 3ax - 2a = 0$ 을 일차항의 계수와 상수항을 바꾸어 풀었더니 한 근이 -3 이었다. 이때, 올바른 근을 구하면?

① $x = 1$ 또는 2

② $x = -1$ 또는 -2

③ $x = 1$ 또는 -3

④ $x = -1$ 또는 -3

⑤ $x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ 또는 $\dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}$

해설

일차항의 계수와 상수항을 바꾸어 놓은 식은 $x^2 - 2ax + 3a = 0$

그때의 해가 $x = -3$ 이므로 대입하면

$9 + 6a + 3a = 0$

$\therefore a = -1$

따라서 이차방정식은

$x^2 - 3x + 2 = 0,\ (x-2)(x-1) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 1$

16. 이차방정식 $12x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근이 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ 이고, x^2 의 계수가 12 인 이차방정식은

$12\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0, 12x^2 - x - 1 = 0$

따라서 $a = -1, b = -1$ 이므로 $a + b = -2$ 이다.

17. 연속하는 세 자연수가 있다. 가장 큰 수의 제곱이 다른 두 수의 제곱의 합보다 3만큼 더 클 때, 이 세 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

연속하는 세 자연수를 $x-1,\ x,\ x+1$ 이라 하면

$(x+1)^2 = (x-1)^2 + x^2 + 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x-1, x, x+1$은 자연수이므로 $x = 3$

$\therefore\ 2+3+4 = 9$

18. 기호 $[a]$ 는 a 의 값을 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다. 예를 들면 $[1.2]=1$, $[\sqrt{5}]=2$ 이다. 이차방정식 $x^2-4x-7=0$ 의 근 중 양수인 것을 a 라 할 때, $(a-[a]+3)^2$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 7 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$x^2-4x-7=0$ 에서

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+28}}{2}=2\pm\sqrt{11}$$

따라서 양수인 근 a는 $2+\sqrt{11}$

$3<\sqrt{11}<4$ 이므로 $5<2+\sqrt{11}<6$

$\therefore\ [a]=5$

$\therefore\ (a-[a]+3)^2=(2+\sqrt{11}-5+3)^2$

$=(\sqrt{11})^2=11$

19. 이차방정식 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ 일 때, 유리수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$ 이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}+2$

근과 계수와의 관계에서

$-\dfrac{b}{a} = (\sqrt{5}+2)+(-\sqrt{5}+2) = 4$, $\dfrac{5}{a} = (\sqrt{5}+2)(-\sqrt{5}+2) = -1$

$\therefore a = -5$

$\therefore b = -4a = (-4) \times (-5) = 20$

$\therefore a+b = -5+20 = 15$

20. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차가 4 이고, 큰 근이 작은 근의 3 배일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2 ② -3 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 근을 $x,\ x+4$ 라 하면 $3x = x + 4$

$\therefore\ x = 2$

따라서 두 근은 2, 6 이다.

2, 6 을 두 근으로 $x^2 + ax + b = 0$ 에 대입하여 연립하면

$a = -8,\ b = 12$ 가 나온다.

따라서 $a + b = -8 + 12 = 4$ 이다.

21. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2 + 6x - 2 = 0$
② $x^2 - 6x + 2 = 0$
③ $x^2 + 6x - 4 = 0$
④ $x^2 - 6x + 4 = 0$
⑤ $x^2 + 6x - 6 = 0$

해설

α, β 는 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이므로
$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$
구하는 방정식의 두 근이 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 합}) &= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \\ &= \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 곱}) &= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} = 4\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 이다.

22. 한 원 위에 n 개의 점을 잡아 n 각형을 만들었다. 새로 만든 도형의 대각선의 총 개수가 35 개 일 때, n 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$\frac{n(n-3)}{2} = 35$ 이므로

$n^2 - 3n - 70 = 0$

$(n+7)(n-10) = 0$

$n = 10 (\because n > 0)$

23. 서로 다른 두 실수 $p,\ q$ 가 $p^2+ap+b=0, q^2+aq+b=0$ 을 만족할 때, 이차방정식 $x^2-(2c-a)x-ac+b=0$ 의 근의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

서로 다른 두 실수 $p,\ q$ 가 $p^2+ap+b=0, q^2+aq+b=0$ 을 만족하므로

$x^2+ax+b=0$ 은 서로 다른 두 근을 가진다.

따라서 $D=a^2-4b>0$ $\cdots$ ㉠

$x^2-(2c-a)x-ac+b=0$ 에서

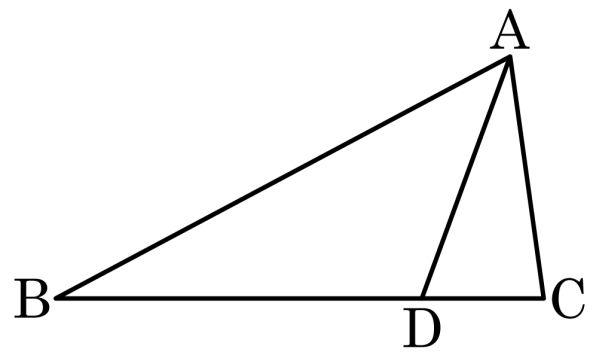
$D=(a-2c)^2-b(b-ac)=a^2+4c^2-4b$

그런데 ㉠에서 $a^2-4b>0$ 이고 $4c^2\geq 0$ 이므로

$a^2+4c^2-4b>0$

따라서 $x^2-(2c-a)x-ac+b=0$ 에서 $D>0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

24. 다음 그림에서 $\angle ABC = \angle CAD$, $\overline{BC} = 8cm$ 이고 선분 AC 의 길이는 선분 CD 의 길이의 2 배일 때, 선분 CD 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\angle ABC = \angle CAD$, $\angle C$ 는 공통이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$ (AA 닮음)

따라서 닮음비에 의해 $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{AC}$ 의 비례식이 성립한다.

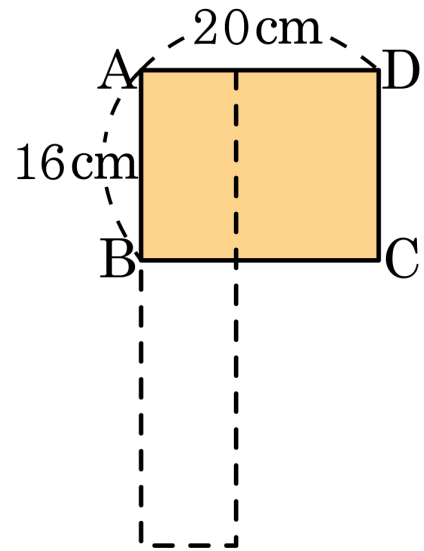
$\overline{CD} = x$ 라 놓으면

$2x : 8 = x : 2x$

$4x^2 = 8x$, $x^2 - 2x = 0$

따라서 $x = 2$ 이다.

25. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 20cm , 16cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 매초 2cm 씩 줄어들고, 세로의 길이는 매초 4cm 씩 늘어난다고 할 때, 넓이가 처음 직사각형의 넓이와 같아지는데 걸리는 시간은?



① 2 초 ② 4 초 ③ 6 초

④ 8 초 ⑤ 10 초

해설

구하는 시간을 x 초 라 하면

처음 넓이는 $20 \times 16 = 320$

x 초 후의 넓이는 $(20 - 2x)(16 + 4x)$ 이다.

따라서 $(20 - 2x)(16 + 4x) = 320$

$-8x^2 + 48x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 6$