

1. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

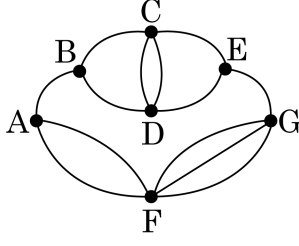
해설

$$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$$

2. A, B, C, D, E, F, G 의 일곱 도시 사이에 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 같은 지점은 많아야 한 번 밖에 지날 수 없고 지나지 않는 도시가 있어도 될 때, A 에서 G 로 가는 경우의 수는?



- ① 6 ② 8 ③ 9 ④ 12 ⑤ 14

해설

(i) A 에서 B, E 를 경유해서 G 로 가는 방법은
A → B → C → E → G 의 1 가지
A → B → D → E → G 의 1 가지
A → B → C → D → E → G 의 2 가지
A → B → D → C → E → G 의 2 가지
∴ 6 (가지)
(ii) A 에서 F 를 경유해서 G 로 가는 방법
 $2 \times 3 = 6$ (가지)
(i), (ii)가 동시에 발생할 수 없으므로
 $6 + 6 = 12$ (가지)

3. 50 원, 100 원, 500 원짜리 동전만 사용할 수 있는 자동판매기에서 400 원짜리 음료수 3 개를 선택하려고 한다. 세 종류의 동전을 모두 사용하여 거스름돈 없이 자동판매기에 동전을 넣는 방법의 수는? (단, 동전을 넣는 순서는 고려하지 않는다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

500 원을 기준으로 생각한다. 100 원을 A , 50 원을 B 라 하면,
(1) 500 원 1 개 :
 $(A, B) = (6, 2), (5, 4), (4, 6),$
 $(3, 8), (2, 10), (1, 12)$
(2) 500 원 2 개 : $(A, B) = (1, 2)$
∴ 총 7가지

4. 남자 5명, 여자 4명 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑아서 일렬로 세우는 방법은 몇 가지인가?

① 1800 ② 3600 ③ 4800 ④ 5400 ⑤ 7200

해설

$${}_5C_3 \times {}_4C_2 \times 5! = 7200$$

5. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, B 와 C 가 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 12가지

해설

B 와 C 를 하나로 보면, 세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.
 $\Rightarrow 3! = 6$
여기에 B 와 C 가 자리를 바꾸는 방법을 곱해준다.
 $\therefore 6 \times 2 = 12$

6. 남학생 5 명, 여학생 3 명을 일렬로 세울 때, 양 끝에는 남학생을 세우고 여학생끼리는 서로 이웃하게 세우는 방법의 수는?

① 144 ② 288 ③ 864 ④ 1526 ⑤ 2880

해설

양 끝에 남학생 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_5P_2$ (가지),
여학생끼리 서로 이웃하게 세워야 하므로 여학생 3명을 한 명으로 생각하여 남은 남학생 3명과 세우는 방법의 수는 $4!$ (가지)
이때, 여학생 3명끼리 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는 $3!$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
 ${}_5P_2 \times 4! \times 3! = 20 \times 24 \times 6 = 2880$ (가지)

7. continue의 8개의 문자를 양 끝에 c와 e가 오도록 일렬로 나열하는 방법의 수는?

- ① 180 ② 360 ③ 540 ④ 720 ⑤ 1080



8. A, B, C, D, E 다섯 명의 학생이 있다. 항상 D가 C보다 앞에 오도록 일렬로 서는 방법의 수는 ?

① 12 ② 20 ③ 24 ④ 30 ⑤ 60

해설

전체를 줄세운 다음 C, D가 순서를 바꾸어 서는 경우로 나누어 주면 된다.

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

9. 5 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 세 자리 정수를 만들 때, 9의 배수의 개수는?

① 6 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 24

해설

각 자리수의 합이 9의 배수일 때 그 수는 9의 배수가 된다.
0, 1, 2, 3, 4에서 각 자리수의 합이 9의 배수가 되는 조합은
(2, 3, 4) 뿐이다. 2, 3, 4를 써서 만들 수 있는 3자리 정수는
 $3! = 6$

10. 다음 등식을 만족시키는 n 의 값을 구하여라.

${}_{10}C_{n+2} = {}_{10}C_{2n+2}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

${}_{10}C_{n+2} = {}_{10}C_{2n+2}$ 에서
 $n+2 = 2n+2$ 일 때 : $n = 0$
 $n+2 = 10 - (2n+2)$ 일 때 : $3n = 6, n = 2$
 $\therefore n = 0 \text{ or } 2$

11. 서로 다른 과일 6 개에 대하여 과일을 1 개, 2 개, 3 개로 나누어 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

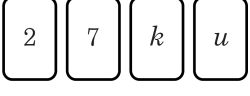
▶ 정답 : 360가지

해설

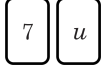
나눈 후 배열하는 방법까지 고려한다.

$$\Rightarrow_6 C_1 \times_5 C_2 \times_3 C_3 \times 3! = 360$$

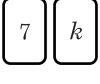
12. 한쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영문자가 쓰여진 카드가 다음 규칙을 만족한다. ‘카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 자음이 적혀 있다.’ 탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 반드시 확인해야 할 필요가 있는 것은?



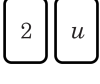
㉠



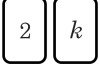
㉡



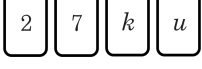
㉢



㉣



㉤



해설

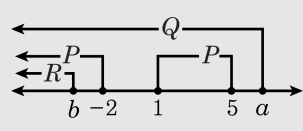
주어진 규칙의 대우는 ‘한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀있다.’이다. 따라서 홀수가 적혀있는 카드와 모음이 적혀 있는 카드만 확인하면 된다.

13. 세 조건 $p: x \leq -2$ 또는 $1 \leq x \leq 5$, $q: x \leq a$, $r: x \leq b$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, p 는 r 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① a 의 최댓값은 -2 이고, b 의 최솟값은 5 이다.
 - ② a 의 최솟값은 -2 이고, b 의 최댓값은 5 이다.
 - ③ a 의 최댓값은 5 이고, b 의 최솟값 -2 이다.
 - ④ a 의 최솟값은 5 이고, b 의 최댓값은 -2 이다.
 - ⑤ a, b 의 최댓값, 최솟값은 존재하지 않는다.

해설

$$p \rightarrow q, P \subset Q$$

$$r \rightarrow p, R \subset P$$



$$\therefore b \leq -2 \text{ 그리고 } a \geq 5$$

a 의 최솟값은 5 이고 b 의 최댓값은 -2 이다.

14. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$	$\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x + y \geq x - y $	$\textcircled{\tiny \supset} \quad x + y \geq x - y $

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \supset}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$ 일 때만 성립한다.
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$
 $\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \supset} \quad$ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$ 이다.

15. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

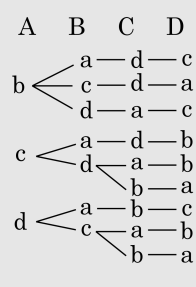
$$\therefore b = 2a$$

16. A, B, C, D 네 사람이 각자 모자 a, b, c, d 를 하나씩 가져갔을 때, 모두 다른 사람의 모자를 가져갔을 경우의 수는?

▶ 답: 가지

▶ 정답 : 9가지

해설



17. 어느 동물원에서 그림과 같이 번호가 적혀 있는 6 칸의 동물 우리에 호랑이, 사자, 늑대, 여우, 원숭이, 곰을 각각 한 마리씩 넣을 때, 호랑이와 사자는 이웃하지 않게 넣으려고 한다. 예를 들어, <1>의 경우에는 <2>와 <4>가 이웃하는 우리이고, <3>, <5>, <6>은 이웃하지 않는 우리이다. 이때, 6 마리의 동물들을 서로 다른 우리에 각각 넣는 방법의 수는?

<1>	<2>	<3>
<4>	<5>	
<6>		

- ① 112 ② 120 ③ 184 ④ 216 ⑤ 432

해설

(호랑이, 사자)가 이웃하지 않는 경우는 9 가지
즉, (1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6) 이
고
서로 바꾸는 경우의 수가 2 가지 이므로 구하는 방법의 수는
 $9 \times 2 \times 4! = 432$

18. 임의의 실수 x, y 에 대하여 항상 $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + ay + b > 0$ 이 성립할 때, a 의 값과 b 의 최소 정수값의 합을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

x 에 대하여 정리하면 $x^2 + 2(y+2)x + y^2 + ay + b > 0 \cdots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로
 $\frac{D}{4} = (y+2)^2 - (y^2 + ay + b) < 0$
 $\therefore (4-a)y + 4-b < 0 \cdots \textcircled{B}$
또, $\textcircled{B}$ 이 임의의 실수 y 에 대하여 성립해야 하므로
 $4-a=0, 4-b<0$
 $\therefore a=4, b>4$
 $a=4, b$ 의 최소정수는 5
 $\therefore a+(b \text{의 최소정수값})=9$

19. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
 $1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$
이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
 $ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.
 $\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$
곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① $abc, a = b = c = 1$ ② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$ ④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, ab + bc + ca \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3 = 8$ 에서
 $a = b = c = 1$

20. 무리함수 $y = \sqrt{x+2} + 2$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha, y = \beta$ 라 하자. 이 때, $\alpha^2 - 5\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x+2} + 2, y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같이 그 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근

은 $y = x$ 를 만족한다. ($\alpha = \beta$)
따라서, $y = \sqrt{x+2} + 2$ 와 $y = x$ 를 연립하면 된다.

$$x = \sqrt{x+2} + 2 \text{에서 } x - 2 = \sqrt{x+2}$$

$$x^2 - 4x + 4 = x + 2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha \ (\because \alpha = \beta)$$

$$= -2$$

