

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

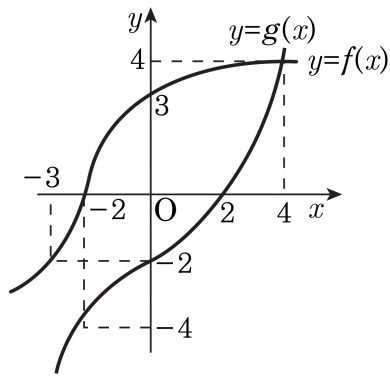
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(4) = 4$
모든 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 이므로
 $g(x)$ 는 상수함수이다.
즉, $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

2. 일대일대응인 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g \circ f^{-1})(3)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ 이므로
그래프를 이용하여 $f^{-1}(3)$ 의 값을 찾는다.

$f^{-1}(3) = a$ 라 하면 $f(a) = 3$

$\therefore a = 0$

$\therefore (g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3)) = g(0) = -2$

3. $\sqrt{x+2} = 2$ 일 때, $(x+2)^2$ 은?

① $\sqrt{2}$

② 2

③ 4

④ 8

⑤ 16

해설

$$x+2=4, (x+2)^2=16$$

4. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

- ① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$ ② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$ ④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

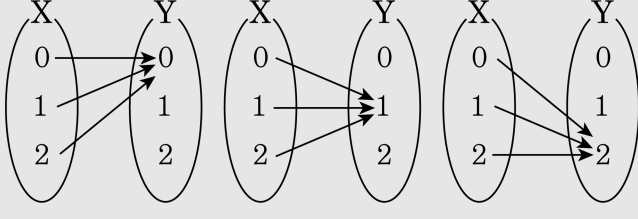
「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

5. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

6. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$ 일 때, 합성함수 $g \circ f$ 의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) \\ = 2(x + 2) - 3 = 2x + 1$$

합성함수 $g \circ f$ 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$y = 2x + 1$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \text{ 이 된다.}$$

따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

7. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2 \end{aligned}$$

8. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{2}{x(x+2)}$

② $\frac{3}{x(x+2)}$

③ $\frac{2}{(x+2)(x+3)}$

④ $\frac{3}{(x+2)(x+3)}$

⑤ $\frac{3}{x(x+3)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)}\end{aligned}$$

9. 다음 식을 간단히 한 식은?

$$\frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}}$$

① $a + 1$

② $a + 2$

③ $-a + 1$

④ $-a + 2$

⑤ $a - 1$

해설

아래에서부터 계산해 올라가자.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{a - 1}} = \frac{a - 1}{a - 1 - a} = -a + 1$$

10. 함수 $y = -\frac{1}{x} + 1$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

① $y = \frac{1}{1-x}$
④ $y = \frac{1+x}{x}$

② $y = \frac{1}{1+x}$
⑤ $y = \frac{x}{1+x}$

③ $y = \frac{x}{1-x}$

해설

$$y = -\frac{1}{x} + 1 \text{ 에서 } \frac{1}{x} = 1 - y$$

$$1 = (1 - y)x, x = \frac{1}{1 - y}$$

$$\therefore y = \frac{1}{1 - x}$$

11. $3 + \sqrt{8}$ 의 소수 부분을 x 라 할 때, $\sqrt{x^2 + 4x}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로

$3 + \sqrt{8} - 2 + 2 = 5 + \sqrt{8} - 2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8} - 2$

(2) 단계

$x + 2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2 + 4x + 4 = 8$,

$x^2 + 4x = 4$ 를 대입하면

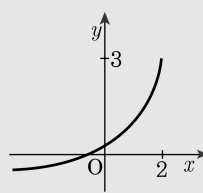
(준식) $= \sqrt{4} = 2$

12. 무리함수 $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 3$ 가 지나는 모든 사분면은?

- ① 1, 2 사분면
- ② 1, 4 사분면
- ③ 1, 2, 3 사분면
- ④ 2, 3, 4 사분면
- ⑤ 1, 3, 4 사분면

해설

꼭지점이 (2,3)이고 (0,1)을 지나므로
∴ 1,2,3 사분면을 지난다.



13. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ($x \geq 2$) 이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

14. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0, 1), (1, 2)\}$

② $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

③ $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2)\}$

④ $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$

⑤ $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

해설

$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
 $(0, a), (1, b), (2, c)$ 의 꼴이어야 한다.

15. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

16. $f(x) = 2x - 3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= 4x - 9, \quad f(f(f(x))) = 8x - 21 \text{ 이므로} \\ 4x - 9 &= 8x - 21 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

17. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

18. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{x+2}{x}$ 일 때, $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 2$ 와 $(g^{-1} \circ f^{-1})(b) = 2$ 를 만족하는 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b = -2$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x} \text{ 일 때,} \\ (f^{-1} \circ g^{-1})(a) &= (g \circ f)^{-1}(a) = 2 \\ \rightarrow (g \circ f)(2) &= a \\ \therefore a &= g\{f(2)\} = g(-1) = -1 \quad (\because f(2) = -1) \\ (g^{-1} \circ f^{-1})(b) &= (f \circ g)^{-1}(b) = 2 \\ \rightarrow (f \circ g)(2) &= b \\ \therefore b &= f\{g(2)\} = f(2) = -1 \quad (\because g(2) = 2) \\ \therefore a &= -1, \quad b = -1 \rightarrow a+b = -2 \end{aligned}$$

19. $x^2 - 2x - 1 = 0$ 일 때, $3x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면 $x - \frac{1}{x} = 2$

따라서 구하는 식은

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 3 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \right\} + 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 1 \\ &= 21\end{aligned}$$

20. 작년엔 3만원 하던 야구 배트와 2만원 하던 글러브가 올해는 각각 10%, 15%가 인상되었다. 야구 배트와 글러브를 한 세트로 볼 때, 한 세트의 인상률은?
- ① 11.5% ② 12% ③ 12.5%
- ④ 13% ⑤ 13.5%

해설

작년의 한 세트의 가격 : $30000 + 20000 = 50000$ (원)

금년의 야구 배트의 가격 : $30000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 33000$ (원)

금년의 글러브의 가격 : $20000 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 23000$ (원)

금년의 한 세트의 가격 : $33000 + 23000 = 56000$ (원)

따라서 한 세트의 가격은 $56000 - 50000 = 6000$ (원) 인상되었으므로,

인상률은 $\frac{6000}{50000} \times 100 = 12(\%)$ 이다.

21. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c (a > 0)$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 1 \}$ 이고,
치역이 $\{ y \mid y \geq 2 \}$ 일 때, $\frac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a}$ 의 최솟값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$

② 1

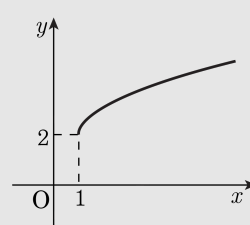
③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2} + 1$

⑤ $2\sqrt{2} + 2$

해설

정의역과 치역의 조건에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 다음과 같다.
즉 $y = \sqrt{a(x-1)} + 2$ 의 형태임을 알 수 있다.



$y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 비교해보면 $b = -a, c = 2$ 이다.

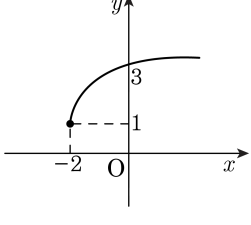
$$\therefore \frac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a} = \frac{2a^2 + 4 + 2a}{2a} = a + \frac{2}{a} + 1$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$$

따라서 $a + \frac{2}{a} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1$ 이므로

최솟값은 $2\sqrt{2} + 1$ 이다.

22. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)} + 1$ 또, 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
 $3 = \sqrt{2a} + 1, \sqrt{2a} = 2$
 $\therefore a = 2$
따라서 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1 = \sqrt{2x+4} + 1$ 이고,
이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로
 $a = 2, b = 4, c = 1$
 $\therefore a + b + c = 7$

23. x 에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m 의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

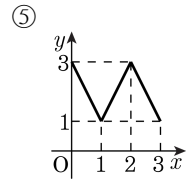
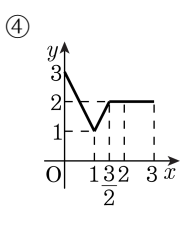
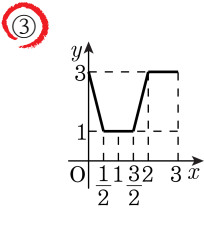
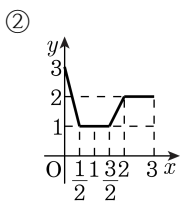
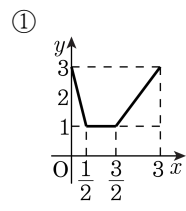
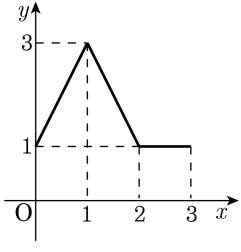
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는
두 그래프 $y = \sqrt{2x}$ 와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.
이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1, 0)$ 을 지난다.
 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이
서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,
 m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.
 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면
 $2x = m^2(x+1)^2$
 $m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (m^2-1)^2 - m^4 = 0$
 $-2m^2 + 1 = 0, m^2 = \frac{1}{2}$
 $\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$
따라서, m 의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$

24. 함수

$y = f(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y = (f \circ f)(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프는 무엇인가?



해설

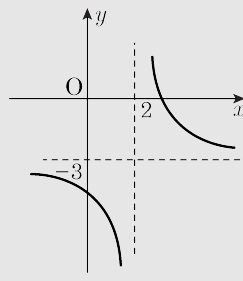
$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프도 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.
 $y = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ 에서
 $f(f(0)) = f(1) = 3$
 $f(f(1)) = f(3) = 1$
 $f(f(2)) = f(1) = 3$
 $f(f(3)) = f(1) = 3$
따라서, $y = (f \circ f)(x)$ 를 그래프로 나타내면 ③과 같다.

25. 다음 중 함수 $y = \frac{-3x+8}{x-2}$ 의 그래프는 제 a 사분면을 지나지 않고, 점 $(0, b)$ 를 지난다고 할 때, $a-b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$y = \frac{-3(x-2)+2}{x-2} = -3 + \frac{2}{x-2}$$



따라서 제2사분면을 지나지 않는다. $\therefore a = 2$

$x = 0$ 일 때 $y = -3 + \frac{2}{-2} = -4$, $\therefore b = -4$

$\therefore a - b = 2 - (-4) = 6$