1. $-1 < x < 1$일 때, $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$$(\text{준식}) = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$$
$$= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$$

2. $-1 < a < 2$일 때, $\sqrt{(a-2)^2} + |a+1|$을 간단히 하면?

① 3 ② -3 ③ $2a-1$

④ $2a+1$ ⑤ $-2a+1$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-2)^2} + |a+1| &= |a-2| + |a+1| \\ &= -(a-2) + a + 1 = 3\end{aligned}$$

3. $a > 0, b < 0$일 때, $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + |-a| + |-b|$를 간단히 하면?

① $2a - 2b$ ② $2a$ ③ $-2b$

④ $2a + 2b$ ⑤ 0

해설

$a > 0,\ b < 0$이므로

$|a| + |b| + |-a| + |-b|$

$= a - b - (-a) + (-b) = 2a - 2b$

4. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 을 간단히 하여라.

① $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

해설

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1+2+2\sqrt{2})-3}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

5. 함수 $y = \sqrt{2x-4} + b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \ge a \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \ge -3 \}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 ab의 값은?

① -6 ② -3 ③ 1 ④ 3 ⑤ 6

해설

$2x-4 \ge 0$ 에서 $2x \ge 4$

$\therefore\ x \ge 2$

주어진 함수의 정의역이 $\{ x \mid x \ge 2 \}$ 이므로

$a = 2$

함수 $y = \sqrt{2x-4} + b$ 의 치역은 $\{ y \mid y \ge b \}$ 이므로 $b = -3$

$\therefore\ ab = -6$

6. 함수 $y=-\sqrt{ax+9}-1$ 의 정의역이 $\{\, x \mid x \geq -3 \,\}$이고, 치역이 $\{\, y \mid y \leq b \,\}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$ax+9 \geq 0$ 에서

$ax \geq -9 \quad \therefore\ x \geq -\dfrac{9}{a}$

$-\dfrac{9}{a}=-3$ 이므로 $a=3$

주어진 함수의 치역은 $\{\, y \mid y \leq -1 \,\}$ 이므로

$b=-1$

$\therefore\ a+b=3+(-1)=2$

7. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$과 일치한다. $n - m$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$이므로

$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼

y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.

따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로

$\therefore n - m = 1$

8. 함수 $y = \sqrt{-2x-2} - 2$의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $m+n$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{-2x-2} - 2 = \sqrt{-2(x+1)} - 2$의
그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 -2만큼
평행이동한 것이다.
$\therefore m+n = -1-2 = -3$

9. 함수 $y = \sqrt{-4x+12}-2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = \sqrt{-4(x-3)}-2 = 2\sqrt{-(x-3)}-2$ 이고

$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)}-2$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 2+3-2 = 3$

10. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2(x-a)+1}+2+b \\ &= \sqrt{2x-2a+1}+2+b \end{aligned}$$

이 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 같으므로
$a = 2,\ \ -2a+1 = b,\ 2+b = c$
따라서, $a = 2,\ b = -3,\ c = -1$ 이므로
$\therefore\ a+b+c = -2$

11. 무리함수 $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면

② 1 , 4 사분면

③ 1 , 2 , 3 사분면

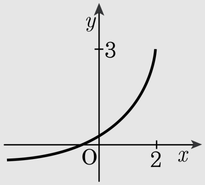
④ 2 , 3 , 4 사분면

⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$이고 $(0,1)$을 지나므로

$\therefore$ $1, 2, 3$ 사분면을 지난다.



12. 함수 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프가 지나는 모든 사분면은?

① 제 1 , 2 사분면　　② 제 1 , 3 사분면

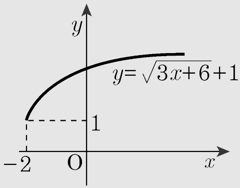
③ 제 1 , 4 사분면　　④ 제 1 , 2 , 3 사분면

⑤ 제 1 , 3 , 4 사분면

해설

$y = \sqrt{3x+6}+1 = \sqrt{3(x+2)}+1$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프는 제 1 , 2 사분면을 지난다.

13. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x | x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y | y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x | x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y | y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

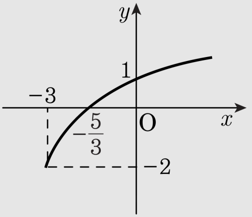
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



14. 정의역이 $\{x \mid x < 2\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{10-3x}{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{5-x}+7$ 에 대하여 $(g \circ f)(-2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 이므로

$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$

$$f(-2) = \frac{10-3\cdot(-2)}{-2-2} = -4$$

$\therefore\ (g \circ f)(-2) = g(-4) = 2\sqrt{5-(-4)}+7 = 13$

15. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(3)$의 값은?

① 3　　② 2　　③ 0

④ $2+\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$에서

$y-2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

16. 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt{(-b)^2} = -b$

② $(-\sqrt{-a})^2 = -a$

③ $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{a}$

④ $(\sqrt{a})^2 = -a$

⑤ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이면 $a < 0,\ b < 0$

④의 경우 $(\sqrt{a})^2 = |a|(i)^2 = -|a| = a$이므로 옳지 않다.

17. $x-y<0$, $xy<0$일 때, $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$를 간단히 하면?

① $2x$ ② $2y$ ③ $-2x$

④ $-2y$ ⑤ $2x-2y$

해설

$x-y<0,\ \ xy<0 \Rightarrow x<0,\ \ y>0$

$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\ \sqrt{x^2}-|y|$

$=\ \sqrt{(x-y)^2}+|x|-|y|$

$=|x-y|+|x|-|y|$

$=-(x-y)-x-y=-2x$

18. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\frac{1}{b}-a$의 값은?

① $1-\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $3+\sqrt{3}$

④ $3-\sqrt{3}$ ⑤ $-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$

해설

$\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2,\ -2<-\sqrt{3}<-1,\ 1<3-\sqrt{3}<2$

$a=1,\ b=3-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$

$\frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=2+\sqrt{3}-1=1+\sqrt{3}$

19. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $\frac{1}{b}-a$의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ 1

해설

$\sqrt{19-8\sqrt{3}} = \sqrt{19-2\sqrt{48}} = \sqrt{16}-\sqrt{3}$

따라서, $a=2,\ b=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$

$\therefore\ \frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-2=(2+\sqrt{3})-2=\sqrt{3}$

20. $x = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$일 때, $x^2 - 6x + 10$의 값을 구하면?

① -2 ② 0 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}} = 3 + \sqrt{2}$

$x - 3 = \sqrt{2}$, 양변을 제곱하면

$x^2 - 6x + 9 = 2$, 양변에 1을 더하면

$\therefore\ x^2 - 6x + 10 = 3$

21. x, y가 유리수이고, 등식 $x^2 + \sqrt{3}y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y - 3 - 3\sqrt{3} = 0$이 성립할 때, 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

주어진 등식을 $\sqrt{3}$에 대하여 정리하면

$(x^2 - 2x - 3) + (y^2 + 2y - 3)\sqrt{3} = 0$

여기서, $x^2 - 2x - 3$, $y^2 + 2y - 3$ 이 모두 유리수이고 $\sqrt{3}$ 이 무리수이므로

$x^2 - 2x - 3 = 0$이고, $y^2 + 2y - 3 = 0$

즉, $(x-3)(x+1) = 0$이고 $(y+3)(y-1) = 0$

$\therefore\ x = 3$ 또는 $x = -1$ 이고 $y = -3$ 또는 $y = 1$

따라서, 구하는 x, y의 쌍은

$(x,\ y) = (3,\ 1),\ (3,\ -3),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -3)$

22. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab >\ 0$ 이면 제 3사분면

② $ab <\ 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

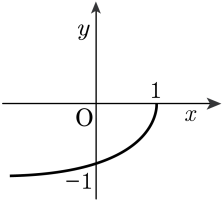
④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0\ )$이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

23. $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

점$(1,0)$에서 시작이므로 $-\frac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0,-1)$를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

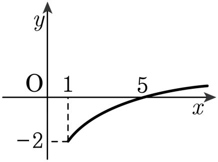
양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

24. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1　② −1　③ 2　④ −2　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1, -2)$에서부터 시작하므로

$-\frac{b}{a} = 1,\ c = -2$

$\therefore -b = a\ ,\ c = -2$

$y = \sqrt{ax-a}-2$가 점$(5, 0)$을 지나므로

$0 = \sqrt{5a-a}-2,\ 2 = \sqrt{4a}$

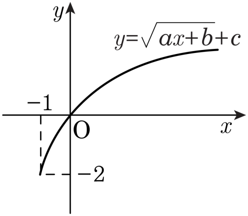
양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$이므로

$a+b+c = 1-1-2 = -2$

25. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로

$y = \sqrt{ax+b}+c$

$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{a(x+1)}-2$

이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$

$\therefore \sqrt{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

$y = \sqrt{4x+4}-2$

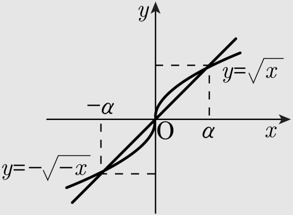
$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$

26. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때,
세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0 이다.



27. 두 집합 $A = \{(x,\ y) \mid y = \sqrt{2x-1}\}$, $B = \{(x,\ y) \mid y = mx+1\}$에서 $A \cap B \neq \varnothing$일 때, m의 값의 범위를 구하면?

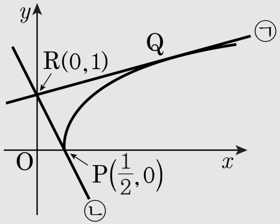
① $-2 \le m \le \sqrt{2}$ ② $-1 \le m \le \sqrt{2}-1$

③ $-2 \le m \le \sqrt{2}-1$ ④ $-2 \le m \le \sqrt{3}-1$

⑤ $-1 \le m \le \sqrt{3}-1$

해설

그림에서 직선 ㉡이 점 P를 지날 때부터 ㉠과 점 Q에서 접할 때까지의 m의 값이 구하는 범위이다.



(i) $P\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지날 때, $m=-2$

(ii) 접할 때는 $\sqrt{2x-1} = mx+1$에서

$$m^2x^2 + 2(m-1)x + 2 = 0$$

$$\therefore \frac{D}{4} = (m-1)^2 - 2m^2 = 0$$

$$\therefore m = -1+\sqrt{2}\ (\because m > 0)$$

(i), (ii)에서 $-2 \le m \le \sqrt{2}-1$

28. 무리함수 $y = -\sqrt{1-x}+2$의 역함수는?

① $y=(x-2)^2+1(x \le 2)$　② $y=(x-2)^2-1(x \le 2)$

③ $y=-(x-2)^2+1(x \le 2)$　④ $y=-(x-2)^2-1(x \le 2)$

⑤ $y=-(x+2)^2+1(x \le 2)$

해설

$y=-\sqrt{1-x}+2$에서 $1-x \ge 0$이므로 $x \le 1$

$y-2=-\sqrt{1-x} \le 0$이므로 $y \le 2$

$1-x=(y-2)^2$, $x=-(y-2)^2+1$

x, y를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore y=-(x-2)^2+1(x \le 2)$

29. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$인 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = a$라 하면

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{4}$이고

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= f(\sqrt{3(a-1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \end{aligned}$$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$

$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4$,

$\sqrt{3(a-1)} = 3$

$3(a-1) = 9$, $a-1 = 3$, $a = 4$

$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

30. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f^{-1}(\sqrt{x+a}-1)=x+b$, $f(1)=0$일 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f^{-1}(\sqrt{x+a}-1)=x+b$에서

$f(x+b)=\sqrt{x+a}-1$

이 때, $f(1)=0$이므로

위의 식에 $x=1-b$를 대입하면

$f(1-b+b)=\sqrt{1-b+a}-1$

$0=\sqrt{1-b+a}-1$, $\sqrt{a-b+1}=1$

$a-b+1=1$

$\therefore a-b=0$

31. $< x >= x - [x]$ 라 할 때,

$< \sqrt{3+2\sqrt{2}} > - \dfrac{1}{< \sqrt{3+2\sqrt{2}} >}$ 의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $-2\sqrt{2}$　　② -2　　③ -1

④ 2　　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$= \sqrt{2}+1 = x \text{라 하자.}$$

$[x] = 2$, $< x >= \sqrt{2}-1$

$$(\text{준식}) = (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1) = -2$$

32. 다음 등식 $x=\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\cdots}}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

① $\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ③ 1.5

④ $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}\right)$ ⑤ $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$x=\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\cdots}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}+x}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{3}{2}+x$$

$$\Rightarrow x^2-x-\frac{3}{2}=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{7}}{2}(\because x>0)$$

33. $x = \dfrac{2a}{1+a^2}$ $(a>1)$ 일 때, $P = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하면?

① a ② $a+1$ ③ $a-1$ ④ a^2 ⑤ $\dfrac{1}{a}$

해설

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1 + \frac{2a}{1+a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+2a+a^2}{1+a^2}} = \frac{\sqrt{(a+1)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$$

($\because$ 조건에서 $a>1$)

또, $\sqrt{1-x} = \dfrac{|a-1|}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\therefore\ P = \frac{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} - \dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}$$

$$= \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

34. $x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x+y}{4}}-\sqrt{1-\frac{x+y}{4}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1,\ x+y=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{1+\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sqrt{1-\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$$

주어진 식에 대입하면

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

35. x, y가 유리수일 때, $[x,\ y] = \sqrt{2}x + y$로 정의하자. 유리수 a, b가 $[2a,\ 2b] + 1 = [b,\ a] - 2$를 만족할 때, $a + b$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$[2a,\ 2b] + 1 = \sqrt{2}(2a) + 2b + 1$

$[b,\ a] - 2 = \sqrt{2}b + a - 2$

$\therefore\ (2b+1) + 2a\sqrt{2} = (a-2) + b\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2b + 1 = a - 2 \\ 2a = b \end{cases}$ 에서

$a = -1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = -1 - 2 = -3$

36. 자연수 x, y, z에 대하여 $\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$가 성립할 때, $x+y+z$의 값을 구하면?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

$\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$17+x\sqrt{2} = y^2+2z^2+2yz\sqrt{2}$

$\therefore\ y^2+2z^2 = 17 \cdots$ ㉠, $x = 2yz \cdots$ ㉡

㉠에서 $z=1$이면 $y=\sqrt{15}$이므로 자연수가 아니다.

$z=2$이면 $y^2=9\quad\therefore\ y=3$

$z=3$이면 $y^2=-1<0$이므로 모순

$\therefore\ x=12,\ y=3,\ z=2$

$\therefore\ x+y+z=17$

37. $f(x)$는 유리수를 계수로 하는 x의 다항식이고, $f(x)=x^2+ax+b$, $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})=0$일 때, $a-b$의 값은?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ 0　　⑤ 3

해설

$\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}}=2+\sqrt{3}$

$\therefore\ f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})=f(2+\sqrt{3})$

$=(2+\sqrt{3})^2+a(2+\sqrt{3})+b$

$=(7+2a+b)+(4+a)\sqrt{3}=0$

그런데, $7+2a+b$, $4+a$는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$7+2a+b=0$, $4+a=0$ $\quad\therefore\ a=-4$, $b=1$

$\therefore\ a-b=-4-1=-5$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})=0$이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=2+\sqrt{3}$은 $x^2+ax+b=0$의 한 근이고, a, b가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합 $4=-a$, 두 근의 곱 $1=b$

$\therefore\ a-b=-4-1=-5$

38. 함수 $y=\dfrac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=6,\ y=-1$ 일 때, 함수 $y=\sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, $a,\ b$ 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y=\dfrac{ax+8}{x+b}=\dfrac{8-ab}{x+b}+a$ 이고

점근선의 방정식이 $x=-b=6,\ y=a=-1$ 이므로 $a=-1,\ b=-6$

함수 $y=\sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x\mid x\le\dfrac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

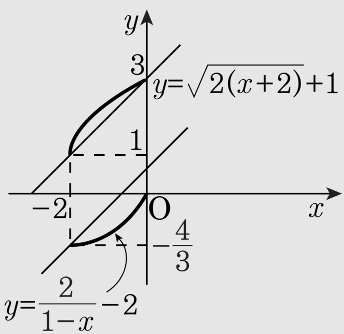
39. 정의역이 $\{x| -2 \le x \le 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \le x \le 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

40. 함수 $f(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{2-x} & (x<0) \end{cases}$ 에 대하여

$(f \circ f)(k)=2$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f \circ f)(k)=f(f(k))=2$ 에서

$f(k)=k'$ 이라 하면 $f(k')=2$

i) $k' \geq 0$ 이면

$y=1-\sqrt{x}$이고, $y \leq 1$ 이므로

함숫값이 2 가 될 수 없다.

$\therefore\ k'<0$

ii) $k'<0$ 이므로

$f(k')=\sqrt{2-k'}=2$

$2-k'=4 \quad \therefore\ k'=-2$

$f(k)=-2$ 인 k 의 값을 구하면 된다.

iii) $k<0$ 이면

$y=\sqrt{2-x}\ (x<0)$ 이고, $y>\sqrt{2}$ 이므로

함숫값이 -2 가 될 수 없다.

$\therefore\ k \geq 0$

iv) $k \geq 0$ 이므로

$f(k)=1-\sqrt{k}=-2$

$\therefore\ k=9$

41. a가 실수일 때, 다음 식이 성립하기 위한 a값의 범위를 구하면?

$$a\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2-1}$$

① $a > 0$

② $a \geq 1$

③ $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

④ $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1$

⑤ $a > 1$ 또는 $a < -1$

해설

좌변 $= a\sqrt{\dfrac{a^2-(1)^2}{(a)^2}} = \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1}$

$\therefore \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1} = \sqrt{a^2-1}$ 에서

$\sqrt{a^2-1}\left(\dfrac{a}{|a|}-1\right) = 0$이므로

$\sqrt{a^2-1} = 0$ 또는 $\dfrac{a}{|a|} = 1$

$\therefore a = \pm 1$ 또는 $a > 0 \cdots$ ㉠

한편 근호 안의 값은 양수이므로

$a^2-1 \geq 0$으로부터 $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1 \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서 $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

42. $x^2+6x+4=0$의 두 근이 a, b일 때, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$의 값은?

① -3 ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ -1 ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 3

해설

$x^2+6x+4=0$

$a+b=-6,\ ab=4 \Rightarrow a<0,\ b<0$

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{b})^2+(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\dfrac{b+a}{-\sqrt{ab}}$

$\therefore\ \dfrac{-6}{-2}=3$

43. $a=\sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}}$에 대하여 $f(x)=[x], g(x)=x-[x]$일 때, $\dfrac{14}{f(a)+g(a)}-\dfrac{2}{g(a)}$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

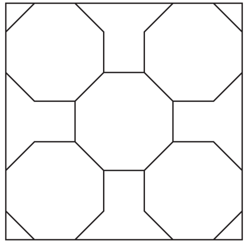
① 2　　② $2+\sqrt{2}$　　③ $\dfrac{7}{2}$

④ 4　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$a=\sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}}=\sqrt{10-8\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{10-8(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{18-8\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{18-2\sqrt{32}}$$
$$\therefore a=4-\sqrt{2}=2.\times\times\times$$
$$[a]=2,\ f(a)=[a]=2$$
$$g(a)=a-[a]=4-\sqrt{2}-2=2-\sqrt{2}$$
$$\therefore \frac{14}{f(a)+g(a)}-\frac{2}{g(a)}=\frac{14}{4-\sqrt{2}}-\frac{2}{2-\sqrt{2}}=2$$

44. 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부에 그림과 같이 합동인 5개의 정팔각형이 위치할 때, 한 개의 정팔각형의 넓이는?



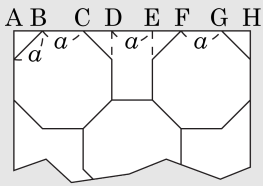
① $2(5\sqrt{2}-7)$ ② $4(5\sqrt{2}-7)$

③ $6(5\sqrt{2}-7)$ ④ $8(5\sqrt{2}-7)$

⑤ $10(5\sqrt{2}-7)$

해설

정팔각형의 한 변의 길이를 a 라 하면



그림에서 $\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{FG}=a$

$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \overline{AH}=3a+4\times\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\quad=(3+2\sqrt{2})a$

그런데 문제의 조건에서 $\overline{AH}=2$ 이므로

$(3+2\sqrt{2})a=2$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}=2(3-2\sqrt{2})$

따라서 한 개의 정팔각형의 넓이는 한 변의 길이가 $\overline{AD}$ 인 정사각형의 넓이에서

네 귀퉁이의 직각이등변삼각형의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$\left(a+2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=(2+2\sqrt{2})a^2$$

$$\therefore (2+2\sqrt{2})a^2=(2+2\sqrt{2})\left\{2(3-2\sqrt{2})\right\}^2$$

$$=8(5\sqrt{2}-7)$$

45. $a,\ b$는 실수이고, $a^3 = 26+15\sqrt{3},\ b^3 = 26-15\sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$의 값을 구하면?

① $-2\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{3}$　　③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$　　⑤ $-3\sqrt{3}$

해설

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=52$

$(ab)^3=(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})=1 \qquad \therefore\ ab=1$

$a+b=t$ 라 하면

$t^3-3t-52=0, \quad (t-4)(t^2+4t+13)=0$

$a,\ b$ 가 실수이므로 t 도 실수이다.

$t=4$ 이므로 $a+b=4$

$$준식 = \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$= \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$a+b=4,\ \ ab=1$ 이므로 a, b 는 $x^2-4x+1=0$ 의 근이고

$a^3>b^3$ 이므로 $a>b$

$\therefore\ a=2+\sqrt{3},\ \ b=2-\sqrt{3} \qquad \therefore\ a-b=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (준식)$=\dfrac{4+2}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

46. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$의 값을 구하면?

① 4　② 3　③ 2　④ 1　⑤ 0

해설

$x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$에서

$\sqrt[3]{\sqrt{3}+2} = a,\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b$라 하면

$x = a - b,\ ab = -1$

$$\begin{aligned} x^3 &= (a-b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \\ &= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x \end{aligned}$$

$\therefore\ x^3 - 3x - 4 = 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ & x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4 \\ &= (x^3 - 3x - 4)(x+2) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

47. $\{(x,\ y)\mid y=\sqrt{x-3}\}\cap\{(x,\ y)\mid y=mx+1\}\neq\varnothing$인 m의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{5}$　④ $-\frac{1}{6}$　⑤ $-\frac{1}{9}$

해설

$y=\sqrt{x-3}$ ········· ①은

$y=\sqrt{x}$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=mx+1$ ········· ②의 y절편은 항상 1이다.

②식이 $(3,\ 0)$을 지날 때, $m=-\frac{1}{3}\cdots$ ㉠

②식이 ① 식에 접할 때,

$\sqrt{x-3}=mx+1$에서 양변 제곱하여 정리하면

$m^2x^2+(2m-1)x+4=0$

$D=0$에서 $m=\frac{1}{6},\ -\frac{1}{2}$

$m>0$이므로 $m=\frac{1}{6}\cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터

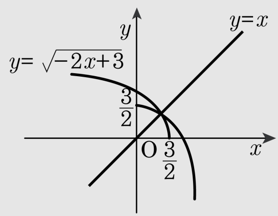
$-\frac{1}{3}\leq m\leq\frac{1}{6}\quad\therefore\ a=\frac{1}{6},\ b=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=-\frac{1}{6}$

48. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설



함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x = \sqrt{-2y+3}$이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,

$x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프는

직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$의

그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$의 그래프와

직선 $y = x$의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$의 을

제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $0 \le x \le \dfrac{3}{2}$ 이므로 $x=1,\ y=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로

$a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

49. 세 집합 $A = \{(x,y) \mid y = m(x+1)-1, m$은 실수$\}$ $B = \{(x,\ y) \mid y = \left|\dfrac{1}{x-1}+2\right|,\ x \neq 1$인실수$\}$

$C = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x-n}+2, x \geq n$인 실수$\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 3$ 이기 위한 m의 범위는 ㉠$n(B \cap C) = 2$ 이기 위한 n 의 범위는 ㉡이다. 빈 칸에 들어갈 값으로 알맞게 짝지은 것은?

① ㉠ $m \geq \dfrac{1}{2}$ ㉡ $n \geq 1$

② ㉠ $m \geq \dfrac{3}{2}$ ㉡ $n < 1$

③ ㉠ $m > \dfrac{3}{2}$ ㉡ $n \geq \dfrac{3}{4}$

④ ㉠ $m > \dfrac{2}{3}$ ㉡ $n \leq \dfrac{3}{4}$

⑤ ㉠ $m \geq \dfrac{2}{3}$ ㉡ $n < \dfrac{3}{4}$

해설

㉠: 그림처럼, ㉠보다 위에 있을 때 교점이 3개 이다.

$0 = m\left(\dfrac{1}{2}+1\right)-1$에서 $m = \dfrac{2}{3}$

$\therefore m$ 의 범위는 $m > \dfrac{2}{3}$

㉡: 그림의 ㉡보다 왼쪽에 있을 때 교점이 2 개이다.

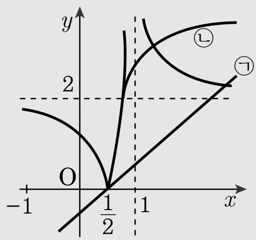
$y = 2$일 때의 교점은 $2 = \left|\dfrac{1}{x-1}+2\right|$

에서

$\left(\dfrac{3}{4},\ 2\right)$

$\therefore\ n = \dfrac{3}{4}$

$\therefore n$의 범위는 $n \leq \dfrac{3}{4}$



50. 곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$에 x축 위의 점 $(a,\ 0)$으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a의 값을 정하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,

그 접선은 점$(a,\ 0)$ 을 지나므로 $y = m(x - a)$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$(mx - am)^2 - 2(mx - am) + 4x - 3 = 0$

$m^2x^2 - 2(am^2 + m - 2)x + a^2m^2 + 2am - 3 = 0$

$$\frac{D}{4} = (am^2 + m - 2)^2 - m^2(a^2m^2 + 2am - 3) = 0$$

정리하면, $(1 - a)m^2 - m + 1 = 0$

m의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$이어야 하므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{1 - a} = -1$$

$\therefore a = 2$