

1. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2 \end{aligned}$$

2. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}\end{aligned}$$

3. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$$\therefore a=-1, b=2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$

4. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} \text{의 우변을 통분하여 계산하면}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4} \end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -2$$

$$\therefore a+b = -3$$

5. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 10$$

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x$$

$$1-x=10$$

$$\therefore x = -9$$

6. 다음 식을 간단히 한 식은?

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}$$

① $a + 1$

② $a + 2$

③ $-a + 1$

④ $-a + 2$

⑤ $a - 1$

해설

아래에서부터 계산해 올라가자.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{a-1}} = \frac{a-1}{a-1-a} = -a+1$$

7. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

8. $x : y = 2 : 3$ 일 때, $\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값을 구하여라.

① $\frac{12}{5}$

② $\frac{5}{12}$

③ $\frac{13}{5}$

④ $\frac{5}{13}$

⑤ 5

해설

$$x : y = 2 : 3 \Rightarrow x = 2k, y = 3k$$

$$\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} = \frac{3(2k)^2 + 2(2k)(3k)}{4k^2 + (2k)(3k)}$$

$$= \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

9. $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\frac{xy}{x^2 + 2y^2}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{17}$

② $\frac{3}{17}$

③ $\frac{4}{17}$

④ $\frac{5}{17}$

⑤ $\frac{6}{17}$

해설

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}y$$

$$\therefore \frac{xy}{x^2 + 2y^2} = \frac{\frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}y^2 + 2y^2} = \frac{6}{17}$$

10. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} (\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a - b - c}{3a + b + c} = -\frac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 2k, b = 3k, c = 4k$$

$$\therefore \frac{3a - b - c}{3a + b + c} = \frac{6k - 3k - 4k}{6k + 3k + 4k} = \frac{-k}{13k} = -\frac{1}{13}$$

$$\therefore p = 13, q = 1 \quad p + q = 14$$

11. 함수 $y = \frac{x-6}{x-4}$ 의 정의역은 $x \neq a$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq b$ 인 모든 실수이다. 이때, $a - b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

함수 $y = \frac{x-6}{x-4}$ 의 정의역이 $x \neq a$ 인 모든 실수이고

치역이 $y \neq b$ 인 모든 실수이면 $x = a, y = b$ 는 점근선이다.

따라서 $y = \frac{(x-4)-2}{x-4} = \frac{-2}{x-4} + 1$ 에서

$a = 4, b = 1$ 이므로

$\therefore a - b = 4 - 1 = 3$

12. 함수 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3$, $n = 1$

$$m + n = 4$$

13. $y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 이므로

점근선 $x=1$ 에서 $y = \frac{ax+1}{x-1}$

점근선 $y=2$ 에서 $y = \frac{2x+1}{x-1}$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로

$\therefore a+b = 2-1 = 1$

14. 곡선 $xy + x - 3y - 2 = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제 1 사분면

② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면

④ 제 4 사분면

⑤ 없다.

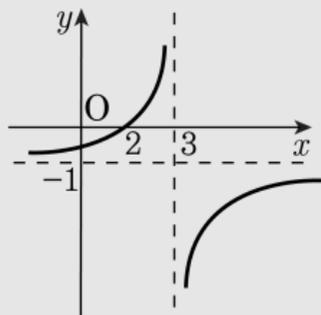
해설

$xy + x - 3y - 2 = 0$ 을 y 에 대하여 정리하면 $(x - 3)y = -x + 2$

$$\therefore y = \frac{-x + 2}{x - 3} = \frac{-1}{x - 3} - 1 (x \neq 3)$$

즉, $y = \frac{-1}{x - 3} - 1$ 은 점근선이

$x = 3$, $y = -1$ 이고 점 $(2, 0)$ 을 지나므로 그래프는 다음 그림과 같다. 따라서, 제 2 사분면을 지나지 않는다.



15. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$f^{-1}(2) = 3$ 에서 $f(3) = 2$ 이므로

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

16. 변분수식 $1 - \frac{\frac{1}{a} - \frac{2}{a+1}}{\frac{1}{a} - \frac{2}{a-1}}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{a}{(a+1)^2}$

② $\frac{2a}{(a+1)^2}$

③ $\frac{3a}{(a+1)^2}$

④ $\frac{4a}{(a+1)^2}$

⑤ $\frac{5a}{(a+1)^2}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 1 - \frac{\frac{-(a-1)}{a(a+1)}}{\frac{-(a+1)}{a(a-1)}} = 1 - \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} \\ &= \frac{4a}{(a+1)^2}\end{aligned}$$

17. $x + 2y = 5$, $xy = 6$ 일 때, $\frac{2y}{x+1} + \frac{x}{2y+1}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{18}$ ⑤ $\frac{1}{36}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2y}{x+1} + \frac{x}{2y+1} &= \frac{2y(2y+1) + x(x+1)}{(x+1)(2y+1)} \\ &= \frac{(x+2y)^2 - 4xy + (x+2y)}{2xy + (x+2y) + 1} \\ &= \frac{5^2 - 4 \times 6 + 5}{2 \times 6 + 5 + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

18. $3x = 4y = 2z$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$ 의 값은? (단, $xyz \neq 0$)

① $-\frac{1}{7}$

② $\frac{2}{11}$

③ $-\frac{43}{11}$

④ $\frac{7}{9}$

⑤ 2

해설

$3x = 4y = 2z = k$ 라 놓는다.

$x = \frac{k}{3}$, $y = \frac{k}{4}$, $z = \frac{k}{2}$ 를 주어진 식에 대입한다.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2} &= \frac{\frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{4}}{\frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4}} \\ &= \frac{64 - 36 + 144}{64 + 36 - 144} \\ &= \frac{172}{-44} = -\frac{43}{11} \end{aligned}$$

19. $x + y = \frac{y + z}{8} = \frac{z + x}{5}$ 일 때, $\frac{5x^2 - 4y^2 + z^2}{xy + 3yz - 2zx}$ 의 값은?

① 1

② $\frac{25}{46}$

③ 2

④ $\frac{12}{23}$

⑤ $\frac{13}{23}$

해설

$$x + y = \frac{y + z}{8} = \frac{z + x}{5} = k \text{ 라고 하면,}$$

$$\begin{cases} x + y = k \\ y + z = 8k \\ z + x = 5k \end{cases}$$

세 식을 각 변끼리 모두 더하면, $x + y + z = 7k$

$$\therefore x = -k, y = 2k, z = 6k$$

$$\frac{5x^2 - 4y^2 + z^2}{xy + 3yz - 2zx} = \frac{5k^2 - 16k^2 + 36k^2}{-2k^2 + 36k^2 + 12k^2} = \frac{25}{46}$$

20. $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{a-b}{a+b}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② $-\frac{1}{5}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \quad 3a = 2b$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}b$$

$$(\text{준 식}) = \frac{\frac{2}{3}b - b}{\frac{2}{3}b + b} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$$

21. $\frac{3x-2y}{x} = \frac{3x-4y}{y}$ 일 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면? (단, $x > y > 0$)

① -1

② 1

③ 2

④ -2

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$(3x - 2y)y = x(3x - 4y)$$

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0,$$

$$(3x - y)(x - 2y) = 0$$

$$x > y > 0 \text{ 이므로 } x = 2y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

22. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답:

▶ 정답: 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

23. 0이 아닌 실수 x, y 가 $\frac{x-y}{4x+2y} = \frac{1}{3}$ 을 만족할 때, 유리식 $\frac{x^2-5y^2}{2xy}$ 이
값은?

① -2

② 1

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

$$\frac{x-y}{4x+2y} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 3y = 4x + 2y \quad x = -5y$$

$$\therefore \frac{x^2 - 5y^2}{2xy} = \frac{20y^2}{-10y^2} = -2$$

24. $\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c}$ 의 값을 구하면?

① 1, 2

② 1, -2

③ -1, -2

④ -1, 2

⑤ 1

해설

(i) $3a + 2b + c \neq 0$ 일 때,
가비의 리에서

$$\frac{(2b+c) + (c+3a) + (3a+2b)}{3a+2b+c} = 2$$

(ii) $3a + 2b + c = 0$ 일 때, $2b + c = -3a$

$$\therefore \frac{-3a}{3a} = -1$$

25. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0이 아니다.)

$$\textcircled{1} \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\textcircled{3} \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\textcircled{5} \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\textcircled{2} \frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$$

$$\textcircled{4} \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{㉢}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉣} \div \textcircled{㉢}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

26. 작년에 16만원하던 자전거와 4만원하던 헬멧이 올해는 각각 5%, 10%씩 인상되었다. 자전거와 헬멧을 한 세트로 보았을 때, 한 세트의 인상률은?

- ① 6% ② 7% ③ 7.5% ④ 8% ⑤ 15%

해설

지난해 자전거, 헬멧 한 세트의 가격은 $16 + 4 = 20$ 만원

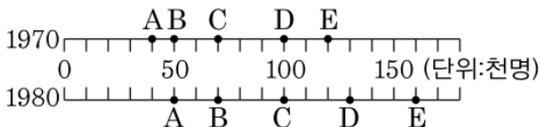
올해 자전거는 $0.05 \times 16 = 0.8$, 즉 8천원 인상.

헬멧은 $0.10 \times 4 = 0.4$, 즉 4천원 인상.

한 세트에 1만 2천원 인상되었다.

따라서 전체의 인상률은 $\frac{1.2}{20} = \frac{6}{100} = 6(\%)$

27. 다음 수직선의 5개의 점은 각각 A, B, C, D, E도시의 1970년의 인가와 1980년의 인구를 나타낸 것이다. 10년 동안의 인구 증가율이 가장 높은 도시는?



- ① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

각 도시의 인구 증가율을 알아보면

$$A = \frac{10}{40} = 25(\%)$$

$$B = \frac{20}{50} = 40(\%)$$

$$C = \frac{30}{70} \approx 43(\%)$$

$$D = \frac{30}{100} = 30(\%)$$

$$E = \frac{40}{120} \approx 33(\%)$$

따라서 C도시의 인구 증가율이 가장 높다.

28. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 X , 무색생물의 수가 Y 일 때, $\frac{Y}{X+Y} \times 100(\%)$ 로 정의된다. 지난 달 수질검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 10(%)이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과, 지난 달에 비해 유색생물의 수는 2배, 무색생물의 수는 3배가 되었다. 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 퍼센트(%) 인가?

- ① 약 14.3% ② 약 15.2% ③ 약 16.4%
- ④ 약 17.1% ⑤ 약 18.5%

해설

지난 달 유색 생물의 수를 X , 무색 생물의 수를 Y 라 하면 $\frac{Y}{X+Y} \times$

$$100 = 10$$

따라서, $\frac{Y}{X+Y} = \frac{1}{10}$ 에서 $X = 9Y$

한편, 이번 달의 유색 생물의 수는 $2X$, 무색 생물의 수는 $3Y$ 이므로 이번 달의 생물학적 지표는

$$\begin{aligned} \frac{3Y}{2X+3Y} \times 100 &= \frac{3Y}{2 \cdot 9Y + 3Y} \times 100 \\ &= \frac{1}{7} \times 100 \approx 14.3(\%) \end{aligned}$$

29. $0 \leq x \leq 2$ 에서, 유리함수 $y = \frac{-9}{x-3} + a$ 의 최솟값이 0이다. a 의 값은?

① -5

② -4

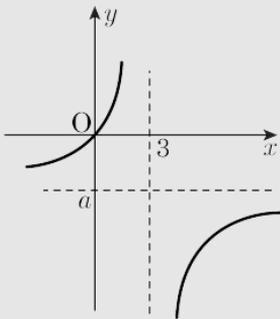
③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

점근선이 $x = 3, y = a$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 최솟값이 0이므로
점 $(0, 0)$ 을 지난다.



$$0 = \frac{-9}{0-3} + a$$

$$\therefore a = -3$$

30. 유리함수 $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$ 에 대하여 이 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 하자. 이 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점의 개수를 구하면?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 무수히 많다.

해설

$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은
 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\Rightarrow x = \frac{3x-2}{x-2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$$

$D > 0$ 이므로 교점은 2개이다.

31. x, y, z 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})\{(xy)^{-1} + (yz)^{-1} + (zx)^{-1}\}}{(x + y + z)(xy + yz + zx)}$$

① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$

② $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}$

③ $(x + y + z)^{-2}$

④ $\frac{1}{xyz}$

⑤ $\frac{1}{xy + yz + zx}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x + y + z} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\ & \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\ & = \frac{1}{x + y + z} \left(\frac{xy + yz + zx}{xyz} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\ & \left(\frac{x + y + z}{xyz} \right) \\ & = \left(\frac{1}{xyz} \right)^2 = x^{-2}y^{-2}z^{-2} \end{aligned}$$

32. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$, $B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}$, $C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \frac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A > B > C$

② $A \geq B = C$

③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$

⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{7}{2}} = \frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}$$

$$B = \frac{2}{2 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{\frac{2}{5}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 5}} = \frac{1}{7}$$

$$C = \frac{3}{3 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{\frac{2}{5}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{15}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{23}} = \frac{23}{24}$$

$$\therefore A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{7}, C = \frac{23}{24}$$

$$\therefore A < B < C$$

33. 서로소인 두 자연수 $m, n(m > n)$ 에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$ 을 나타낼 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값은?

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} \frac{151}{87} &= 1 + \frac{64}{87} = 1 + \frac{1}{\frac{87}{64}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{23}{64}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{64}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{18}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{18}{23}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{5}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}} \end{aligned}$$

$\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 3$ 이므로
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$

34. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ 일 때, $\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k (\neq 0) \text{로 놓으면 } a = bk, b = ck$$

$$\therefore a = ck^2$$

$$\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)} = \frac{(ck^2 - ck)(ck + c)}{(ck^2 + ck)(ck - c)}$$

$$= \frac{ck(k-1) \cdot c(k+1)}{ck(k+1) \cdot c(k-1)} = 1$$

35. $a + b \leq 100$ 이고 $\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 (a, b) 의 개수는?

① 1개

② 5개

③ 7개

④ 9개

⑤ 13개

해설

$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13$$

분모, 분자에 ab 를 곱하면

$$\frac{a^2b + a}{b + ab^2} = \frac{a(ab + 1)}{b(1 + ab)} = \frac{a}{b} = 13$$

$$\therefore a = 13b$$

$a + b \leq 100$ 에 대입하면

$$14b \leq 100, 0 < b \leq \frac{100}{14} < 8$$

따라서 $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 이므로

(a, b) 의 개수는 7개

36. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $ad + bc = 2ad$

② $\frac{ad}{bc} = 1$

③ $\frac{bc-1}{bc} + \frac{1}{ad} = 1$

④ $\frac{1}{bc} - \frac{1}{ad} = 0$

⑤ $a - b = \frac{1}{c - d}$

해설

①, ② $ad = bc$

③ $\frac{adbc - ad + bc}{adbc} = \frac{adbc}{adbc} = 1$

④ $\frac{1}{bc} = \frac{1}{ad}$

37. 지난 해 어느 대학의 입학시험 결과 수험생의 남녀의 비는 8 : 5, 합격자의 남녀의 비는 7 : 4, 불합격자의 남녀의 비는 3 : 2 이었다. 이 때, 전체 합격률은?

① $\frac{9}{26}$

② $\frac{4}{13}$

③ $\frac{9}{26}$

④ $\frac{5}{13}$

⑤ $\frac{11}{26}$

해설

	남	여	전체
합격자	$7b$	$4b$	$11b$
불합격자	$3c$	$2c$	$5c$
수험생	$8a$	$5a$	$13a$

$$7b + 3c = 8a \cdots \textcircled{㉠}$$

$$4b + 2c = 5a \cdots \textcircled{㉡}$$

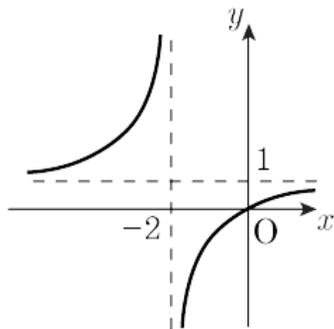
$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} \times 3$$

$$a = 2b$$

$$(\text{전체 합격률}) = \frac{11b}{13a} = \frac{11b}{26} \cdot b = \frac{11}{26}$$

38. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$$y = 1 + \frac{k}{x+2}, \quad (k \neq 0) \text{가 점 } (0, 0) \text{을 지나므로}$$

$$0 = 1 + \frac{k}{0+2}, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } y = 1 + \frac{-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

$$\therefore a = 1, b = 0, c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

39. $x^2 \neq 1$ 이고 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때 $f(-x)$ 는?

① $\frac{1}{f(x)}$

② $-f(x)$

③ $\frac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$

⑤ $f(x)$

해설

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ 에서}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

40. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ 3

④ 4

⑤ $\frac{22}{5}$

해설

$$y = \frac{ax+5}{bx+c} \text{ 에서}$$

$$\text{점근선 } x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$$

$(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{a+5}{b+c}$$

$$2c = -b, 3a = -b, c = -3$$

$$\therefore y = \frac{-2x+5}{6x-3}$$

$$y^{-1} = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$g(x) = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$\therefore g(0) = \frac{5}{2}$$

41. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 이라 하고, $P_n = \frac{T_2}{T_2-1} \times \frac{T_3}{T_3-1} \times \cdots \times \frac{T_n}{T_n-1}$ ($n \geq 2$) 라고 할 때, P_{1991} 에 가장 근사한 값은?

① 2.0

② 2.3

③ 2.6

④ 2.9

⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{T_n}{T_n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \approx 2.9$$

42. 분수식 $\frac{x^3}{x^2+x+1} - \frac{x^3}{x^2-x+1}$ 을 간단히 하면 $\frac{\square}{x^4+x^2+1}$ 일 때, \square 안에 알맞은 식은?

① x^4

② $2x^4$

③ $-x^4$

④ $-2x^4$

⑤ $-4x^4$

해설

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^3}{x^2+x+1} - \frac{x^3}{x^2-x+1} \\
 = & \frac{x^3(x-1)}{x^3-1} - \frac{x^3(x+1)}{x^3+1} \\
 = & \frac{x^3(x-1)(x^3+1) - x^3(x+1)(x^3-1)}{x^6-1} \\
 = & \frac{x^3(x^4+x-x^3-1-x^4+x-x^3+1)}{x^6-1} \\
 = & \frac{x^3(-2x^3+2x)}{x^6-1} \\
 = & \frac{-2x^4(x^2-1)}{x^6-1} \\
 = & \frac{-2x^4}{x^4+x^2+1}
 \end{aligned}$$

43. 상수 a, b, c, d 에 대하여 등식

$$\frac{3}{x(x-2)} + \frac{3}{(x-1)(x-3)} + \frac{3}{(x-2)(x-4)} + \frac{3}{(x-3)(x-5)} + \frac{3}{(x-4)(x-6)} = \frac{d(x^2 - 6x + 3)}{x(x-a)(x-b)(x-c)}$$

이 성립할 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

① 20

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 30

해설

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= -\frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \right) + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} \right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-5} \right) + \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-6} \right) \right\} \\ &= -\frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} \right\} \\ &= -\frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-5} \right) + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-6} \right) \right\} \\ &= -\frac{3}{2} \left\{ \frac{-5}{x(x-5)} + \frac{-5}{(x-1)(x-6)} \right\} \\ &= \frac{15}{2} \cdot \frac{(x-1)(x-6) + x(x-5)}{x(x-5)(x-1)(x-6)} \\ &= \frac{15}{2} \cdot \frac{2x^2 - 12x + 6}{x(x-1)(x-5)(x-6)} \\ &= \frac{15(x^2 - 6x + 3)}{x(x-1)(x-5)(x-6)} \\ &= \frac{d(x^2 - 6x + 3)}{x(x-a)(x-b)(x-c)} \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 5 + 6 + 15 = 27$$

44. a, b, c 가 서로 다른 수이고, $\langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c}$ 라고 정의한다. $\langle a, b, c \rangle = x$ 라 할 때, $\langle b, c, a \rangle$ 를 x 에 관한 식으로 나타내어 그것을 $f(x)$ 라 하자. 이때, x 에 관한 식 $f(x)$ 에 대하여 $f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(10)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{1}{8}$

⑤ $\frac{1}{10}$

해설

$$(i) \langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c} = x$$

$$\therefore a = c + (b-c)x$$

$$(ii) \langle b, c, a \rangle = \frac{b-a}{c-a} = \frac{b - \{c + (b-c)x\}}{c - \{c + (b-c)x\}}$$

$$= \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(9) \times f(10)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10}$$

$$= \frac{1}{10}$$

45. $x + y + z = 3$ 일 때

$$\frac{(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \text{의 값은?}$$

① 0

② 1

③ $\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ -1

해설

$$x + y + z = 3 \text{ 일 때, } x + y + z - 3 = 0$$

$$\therefore (x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

$x-1 = A, y-1 = B, z-1 = C$ 라 하면

$$\begin{aligned} & (A+B+C)^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB+BC+CA) \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{준식} = \frac{AB+BC+CA}{A^2+B^2+C^2}$$

① 에서 양변을 $A^2 + B^2 + C^2$ 으로 나누면

$$\frac{(A+B+C)^2}{A^2+B^2+C^2} = 1 + \frac{2(AB+BC+CA)}{A^2+B^2+C^2} = 0$$

$$(\because A+B+C=0)$$

$$\therefore \frac{AB+BC+CA}{A^2+B^2+C^2} = -\frac{1}{2}$$

46. $\frac{x+y}{x} = \frac{y+z}{y} = \frac{z+x}{z} = k$ 일 때, $k^{2008} + \frac{1}{k^{2008}}$ 의 값을 구하면? (단, $xyz \neq 0, x \neq y \neq z$)

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 5

해설

$$x + y = kx \cdots \textcircled{1}, y + z = kz \cdots \textcircled{2}, z + x = ky \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ 하면 } 2(x + y + z) = k(x + y + z)$$

$$\text{i) } x + y + z \neq 0 \text{ 이면 } k = 2$$

① 에 대입하면 $x + y = 2x, x = y$ 이 되므로

$x \neq y \neq z$ 인 조건에 모순

$$\therefore x + y + z = 0$$

$$\text{ii) } x + y + z = 0 \text{ 이면}$$

$$x + y = -z, y + z = -x, z + x = -y$$

$$-\frac{z}{x} = k, -\frac{x}{y} = k, -\frac{y}{z} = k$$

세 식을 변변 곱하면 $k^3 = -1, (k+1)(k^2 - k + 1) = 0$

$k = -1$ 이면 $x = z$ 가 되므로 조건에 모순

$$\therefore k^2 - k + 1 = 0$$

$$\begin{cases} k^3 = -1 \\ k + \frac{1}{k} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k^{2008} + \frac{1}{k^{2008}} &= (k^3)^{669} \times k + \frac{1}{(k^3)^{669} \times k} \\ &= -(k + \frac{1}{k}) = -1 \end{aligned}$$

해설

$$\text{i) } 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{z}{y} = 1 + \frac{x}{z} = k \text{ 에서}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{x}{z} = k - 1$$

$$\therefore x = (k-1)z, y = (k-1)x, z = (k-1)y$$

$$xyz = (k-1)^3 xyz$$

$$xyz \neq 0 \text{ 이므로 } (k-1)^3 = 1, (k-1)^3 - 1 = 0,$$

$$\{(k-1) - 1\} \{(k-1)^2 + (k-1) + 1\} = 0$$

$$\therefore (k-2)(k^2 - k + 1) = 0$$

$x \neq y \neq z$ 이므로 $k \neq 2$

$$\therefore k^2 - k + 1 = 0, k^3 = -1$$

$$k + \frac{1}{k} = 1$$

$$\text{ii) } k^{2008} + \frac{1}{k^{2008}}$$

$$= (k^3)^{669} \cdot k + \frac{1}{(k^3)^{669} \cdot k}$$

$$= -(k + \frac{1}{k}) = -1$$

47. 비례식 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} (\neq 1)$ 가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb + nd \neq 0, b + d + f \neq 0$)

- ㉠ $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
 ㉡ $\frac{2a+3b}{a-b} = \frac{2c+3d}{c-d}$
 ㉢ $\frac{a}{b} = \frac{ma+nc}{mb+nd}$
 ㉣ $\frac{ab+cd}{a^3+\frac{c^3}{b^2}} = \frac{a^2+c^2}{e^3+\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}}$
 ㉤ $\frac{ab-cd}{a^3+\frac{c^3}{b^2}} = \frac{a^2-c^2}{e^3+\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}}$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{로 놓으면}$$

$$a = bk, c = dk, e = fk$$

$$\textcircled{㉠} \text{ (좌변)} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\text{(우변)} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\therefore \text{(좌변)} = \text{(우변)}$$

$$\textcircled{㉡} \text{ (좌변)} = \frac{2bk+3b}{bk-b} = \frac{2k+3}{k-1}$$

$$\text{(우변)} = \frac{2dk+3d}{dk-d} = \frac{2k+3}{k-1}$$

$$\therefore \text{(좌변)} = \text{(우변)}$$

$$\textcircled{㉢} \text{ (좌변)} = \frac{bk}{b} = k$$

$$\text{(우변)} = \frac{mbk+ndk}{mb+nd} = k$$

$$\therefore \text{(좌변)} = \text{(우변)}$$

$$\textcircled{㉣} \text{ (좌변)} = \frac{bk \cdot b + dk \cdot d}{bk \cdot b - dk \cdot d} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\text{(우변)} = \frac{b^2k^2 + d^2k^2}{b^2k^2 - d^2k^2} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\therefore \text{(좌변)} = \text{(우변)}$$

$$\textcircled{㉤} \text{ (좌변)} = \frac{b^3k^3}{b^2} + \frac{d^3k^3}{d^2} + \frac{f^3k^3}{f^2} = (b+d+f)k^3$$

$$\text{(우변)} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2} = (b+d+f)k^3$$

$$\therefore \text{(좌변)} = \text{(우변)}$$

따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 성립한다.

48. 농도가 다른 두 종류의 소금물 A, B가 있다. 30g의 소금물 A와 20g의 소금물 B를 섞으면 6%의 소금물이 되고, 20g의 소금물 A와 30g의 소금물 B를 섞으면 8%의 소금물이 된다고 한다. 이때, 이 두 종류의 소금물 A, B를 같은 양으로 섞으면 몇 %의 소금물이 되겠는가?

① 6.5%

② 7%

③ 7.5%

④ 8%

⑤ 8.5%

해설

소금물 A, B의 농도를 각각 $x\%$, $y\%$ 라 하면

$$\frac{x}{100} \cdot 30 + \frac{y}{100} \cdot 20 = \frac{6}{100} \cdot 50 \cdots \text{㉠}$$

$$\frac{x}{100} \cdot 20 + \frac{y}{100} \cdot 30 = \frac{8}{100} \cdot 50 \cdots \text{㉡}$$

㉠ + ㉡을 하여 정리하면

$$x + y = 14$$

한편, 두 종류의 소금물 A, B를 똑같이 a g씩 섞는다면, 구하는 농도는

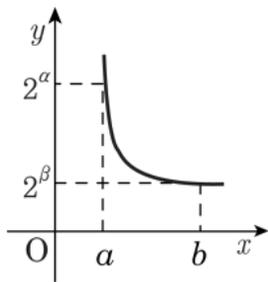
$$\frac{\frac{x}{100} \times a + \frac{y}{100} \times a}{2a} \times 100$$

$$= \frac{a \times \frac{x+y}{100}}{2a} \times 100$$

$$= \frac{x+y}{2} = \frac{14}{2} = 7(\%)$$

49. 함수 $y = f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $ab = 16$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4
 ④ -3 ⑤ -2



해설

$f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프에서

$$f(a) = \frac{1}{2a} = 2^\alpha, f(b) = \frac{1}{2b} = 2^\beta$$

$f(a)$ 와 $f(b)$ 를 곱하면

$$f(a) \times f(b) = \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2b} = 2^{\alpha+\beta}$$

$$\therefore 2^{\alpha+\beta} = \frac{1}{4ab} = \frac{1}{4 \times 16} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$

50. a, b 가 양수일 때, $2 \leq x \leq 3$ 을 만족하는 임의의 실수 x 에 대하여 $ax + 2 \leq \frac{2x-1}{x-1} \leq bx + 2$ 가 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② 1

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ 2

해설

$$\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1} \quad (2 \leq x \leq 3) \text{ 이므로}$$

$$ax + 2 \leq 2 + \frac{1}{x-1} \leq bx + 2$$

$$ax \leq \frac{1}{x-1} \leq bx$$

위의 그래프에 의하여 $a \leq \frac{1}{6}$, $b \geq \frac{1}{2}$

