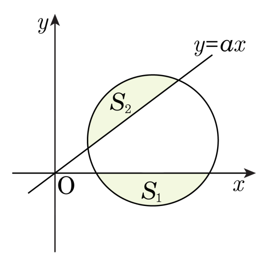
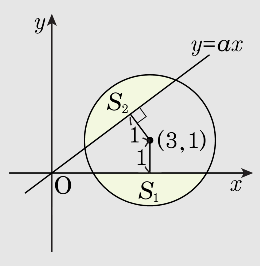
1. 아래 그림에서 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 와 x 축으로둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1=S_2$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

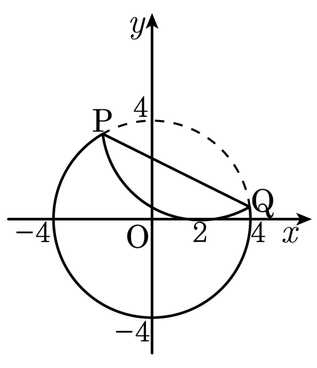


$S_1=S_2$ 이면, 중심 $(3,1)$ 에서
직선 $y=ax$ 까지 거리는 1 이다.

따라서 $1=\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$ 이고 $a=\dfrac{3}{4}$ 이다.

$\therefore\ \ 100a=75$

2. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$을 점 $(2, 0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

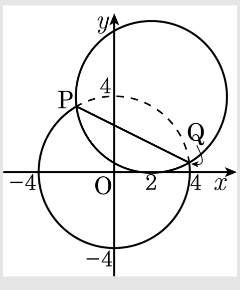


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$//



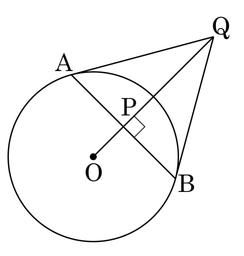
이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2 + y^2 - 16 - \{(x-2)^2 + (y-4)^2 - 16\} = 0$

$\therefore x + 2y - 5 = 0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

3. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

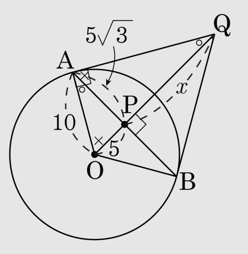
$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$
$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$\therefore\ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$



4. 두 원 $x^2-2x+y^2-4y+4=0$, $x^2-6x+y^2-2y+9=0$ 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이 될 때, ab 의 값을 구하여라.(단, a, b 는 상수)

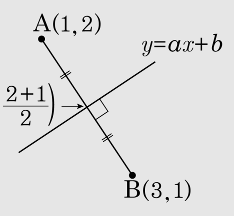
▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

두 원의 방정식은 각각 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 이므로
두 원의 중심 $(1,\ 2)$, $(3,\ 1)$ 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이 되어야 한다.

즉, $\mathrm{M}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$



$\frac{1-2}{3-1}\times a=-1$

$\therefore\ a=2$

선분AB 의 중심

$\mathrm{M}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ 이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$\frac{2+1}{2}=2\cdot\frac{1+3}{2}+b$

$\therefore b=-\frac{5}{2}$

따라서, $ab=-5$

5. $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $A^C \subset B^C$ ② $A \cup B^c = U$ ③ $A - B = \varnothing$
④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cap B = B$

해설

③ 집합 A 가 B에 포함되면 $A - B = \varnothing$ 이 성립하게 된다.

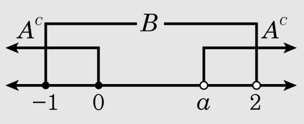
6. 실수 전체의 집합R의 두 부분집합 $A=\{x|0<x\le a\}$, $B=\{x|-1\le x<2\}$ 가 $A^c\cup B=R$를 만족할 때, a의 값의 범위를 구하면? (단, $A\neq\varnothing$)

① $0\le a<2$　② $0<a\le 2$　③ $0\le a\le 2$

④ $0<a<2$　⑤ $-1\le a<5$

해설

$A\neq\varnothing$이므로, $a>0$ 또 $A^c=\{x|x\le 0$ 또는 $x>a\}$



위의 그림에서 $A^c\cup B=R$가 되려면, $0<a<2$

해설

$A^c\cup B=R\leftrightarrow A\subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

7. 명제 '$-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.' 가 참일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

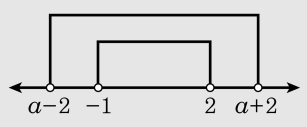
① $0 < a < 1$　　② $0 \le a \le 1$

③ $a < 0$　　④ $a \ge 1$

⑤ $a < 0$ 또는 $a > 1$

해설

명제 '$-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.' 가 참이 되려면
$\{x \mid -1 < x < 2\} \subset \{x \mid a-2 < x < a+2\}$ 이어야 하므로
다음 그림에서 $a-2 \le -1, a+2 \ge 2$



$\therefore 0 \le a \le 1$

8. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P = \left\{a^2, 1\right\}$, $Q = \{a, 1\}$ 이다. p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ -1 또는 0 ⑤ 0 또는 1

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로
$P = Q$
$\left\{a^2, 1\right\} = \{a, 1\}$
$a^2 = a$ 또는 $a^2 = 1$
$a = 0,\ 1$ 또는 $a = -1,\ 1$
이 때, $a = -1$ 이면 $\{1, 1\} = \{-1, 1\}$ 이 되어 모순이므로 a 는 0 또는 1 이다.

9. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$　② $Q \subset P$　③ $Q - P = \phi$
④ $P - Q = P$　⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \to \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면,$P \subset Q^c$ 이다.
즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

10. m이 실수 일 때, $2m^2+\dfrac{8}{m^2}-2 \geq k$를 만족하는 k의 최댓값을 구하시오.
(단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

m이 실수이고, $m \neq 0$이므로 $m^2 > 0$이다.

따라서, $2m^2+\dfrac{8}{m^2}-2 \geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \dfrac{8}{m^2}}-2$

$= 2\sqrt{16}-2 = 8-2 = 6$

11. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$\therefore$ $x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.
$\therefore a = 3$

12. 집합 $X = \{a, b, c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

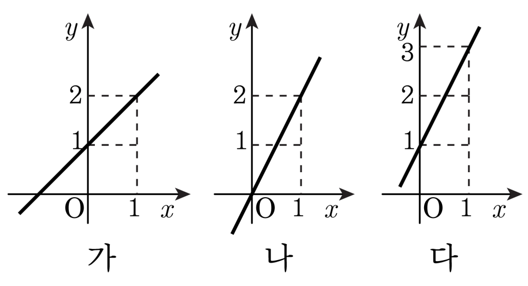
▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore \quad 27 - 6 = 21$(개)

13. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



다음 중 $w(x)$ 를 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f + g$ ⑤ $f - g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면

$f(x) = x + 1,\ g(x) = 2x,\ w(x) = 2x + 1$ 이다.

$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로

$\therefore\ w = f \circ g$

14. 다음<보기>에 주어진 함수의 그래프 중에서 y 축에 대하여 대칭인 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $y = 2\|x\| + 1$ Ⅱ. $\|y\| = 2x + 1$ Ⅲ. $\|y\| = 2\|x\| + 1$

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ　④ Ⅰ, Ⅱ　⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

Ⅰ. x에 절댓값이 있으므로 y축에 대하여 대칭
Ⅱ. y에 절댓값이 있으므로 x축에 대하여 대칭
Ⅲ. $x,\ y$ 에 모두 절댓값이 있으므로 원점에 대하여 대칭이고 또한 y축에 대해서도 대칭이다.

15. $\mathrm{A} = \{-1, 0, 1\}$ 일 때, 집합 A 에서 집합 A 로의 함수 f 가 있다. $f(-x) = f(x)$ 인 함수 f 의 개수는?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

해설

$3 \times 3 = 9$