1. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{3x^2+13x+4}$$

① $x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$
② $x \le -\frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$
③ $x \le \frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$
④ $-4 \le x \le \frac{1}{3}$
⑤ $-\frac{1}{3} \le x \le 4$

해설

$3x^2+13x+4 \ge 0$
$(3x+1)(x+4) \ge 0$
$\therefore\ x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$

2. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 을 간단히 하여라.

① $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

해설

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1+2+2\sqrt{2})-3}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

3. $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$,

$y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

$x+y=4, \quad xy=1$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 4^3 - 3\times 4 = 52 \end{aligned}$$

4. 함수 $y = \sqrt{2x-4} + b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq a \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \geq -3 \}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 ab의 값은?

① -6　② -3　③ 1　④ 3　⑤ 6

해설

$2x - 4 \geq 0$ 에서 $2x \geq 4$

$\therefore\ x \geq 2$

주어진 함수의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 2 \}$ 이므로

$a = 2$

함수 $y = \sqrt{2x-4} + b$ 의 치역은 $\{ y \mid y \geq b \}$ 이므로 $b = -3$

$\therefore\ ab = -6$

5. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이고

$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = -2$

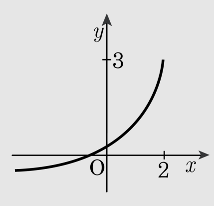
$\therefore\ a+b+c = 2+3-2 = 3$

6. 무리함수 $y=-\sqrt{-2(x-2)}+3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면
② 1 , 4 사분면
③ 1 , 2 , 3 사분면
④ 2 , 3 , 4 사분면
⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$ 이고 $(0,1)$ 을 지나므로
$\therefore$ 1, 2, 3 사분면을 지난다.

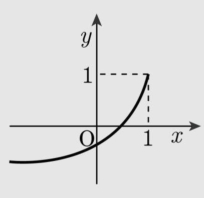


7. 다음중 함수 $y=-\sqrt{-2x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제 1 사분면　　② 제 2 사분면　　③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면　　⑤ 제 3, 4 사분면

해설

$y=-\sqrt{-2(x-1)}+1$의 그래프는
$y=\sqrt{2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한
다음 x축의 방향으로 1 만큼,
y축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
그림과 같다. 따라서 함수의 그래프는
제 2 사분면을 지나지 않는다.



8. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

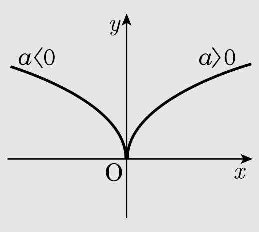
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때의 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.
그러나 $a > 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$
$a < 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이므로 ①은 틀린 것이다.

9. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가
$f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3)+(g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

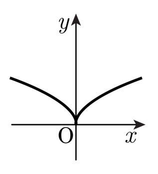
▷ 정답: 6

해설

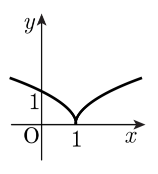
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \circ g)(3)+(g \circ f)(3) = 6$

10. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

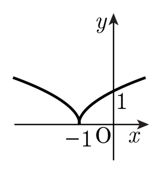
①



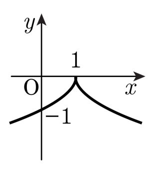
②



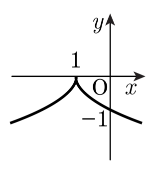
③



④



⑤



해설

$x \geq -1$이면 $y = \sqrt{x+1}$
$x < -1$이면 $y = \sqrt{-x-1}$이므로
3번이 정답임.

11. 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt{(-b)^2} = -b$

② $(-\sqrt{-a})^2 = -a$

③ $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{a}$

④ $(\sqrt{a})^2 = -a$

⑤ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이면 $a < 0,\ b < 0$

④의 경우 $(\sqrt{a})^2 = |a|(i)^2 = -|a| = a$이므로 옳지 않다.

12. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$ 이 성립할 때, $|a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① 0 ② $2a-4$ ③ $4b$

④ -4 ⑤ $-2a+2b$

해설

$\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$ 가 성립한다면

$a-2 \geq 0,\ b+2<0 \Rightarrow a \geq 2,\ b<-2$

$|a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$

$= a-2+(b-2)+|b-a| = a-2+b-2+a-b = 2a-4$

13. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\frac{6}{a+b}+b$의 값은?

① 0　② $\frac{2}{3}$　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

$\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}} = 3-\sqrt{3}$

$a=1,\quad b=2-\sqrt{3}\quad (\because\ 1<\sqrt{3}<2)$

$\therefore \frac{6}{a+b}+b = \frac{6}{3-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3} = 5$

14. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\frac{1}{b}-a$의 값은?

① $1-\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $3+\sqrt{3}$
④ $3-\sqrt{3}$ ⑤ $-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$

해설

$\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2,\ -2<-\sqrt{3}<-1,\ 1<3-\sqrt{3}<2$

$a=1,\ b=3-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$

$\frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=2+\sqrt{3}-1=1+\sqrt{3}$

15. $(1+\sqrt{2})x = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $(1-\sqrt{2})y = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, x^2+xy+y^2의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 33

해설

$(1+\sqrt{2})x = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$

$\therefore\ x = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})y = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ y = \dfrac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}+1} = -3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ x+y = -4\sqrt{2},\ xy = -1$

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= (x+y)^2 - xy \\ &= (-4\sqrt{2})^2 - (-1) = 33 \end{aligned}$$

16. $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 - y^3 - 3(x-y)$ 의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$x = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore\ x - y = \sqrt{2},\ xy = 1$

$x^3 - y^3 - 3(x-y)$

$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - 3(x-y)$

$= (\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

17. 함수 $y = \dfrac{2x-7}{x-1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$ 이고, 함수 $f(x) = \sqrt{ax+b} + c$ 에 대하여 $f(2) = -1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 정의역과 치역을 차례로 구하면?

① $\{ x \mid x \le -3 \}$, $\{ y \mid y \ge 1 \}$

② $\{ x \mid x \ge -2 \}$, $\{ y \mid y \ge -3 \}$

③ $\left\{ x \mid x \ge \dfrac{1}{2} \right\}$, $\{ y \mid y \le -2 \}$

④ $\{ x \mid x \le 1 \}$, $\{ y \mid y \ge -1 \}$

⑤ $\{ x \mid x \ge 2 \}$, $\{ y \mid y \ge 3 \}$

해설

$y = \dfrac{2x-7}{x-1} = -\dfrac{5}{x-1} + 2$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = 1$, $y = 2$

$\therefore\ a = 1,\ b = 2$

$f(x) = \sqrt{x+2} + c$ 에서 $f(2) = -1$ 이므로

$-1 = 2 + c \quad \therefore\ c = -3$

즉, $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ 이므로

정의역은 $\{ x \mid x \ge -2 \}$, 치역은 $\{ y \mid y \ge -3 \}$ 이다.

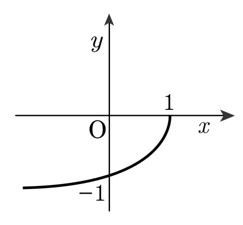
18. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 점(1, 3)을 지난다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행 이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 함수의 그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$
이 때, 이 그래프가 점(1, 3)을 지나므로
$3 = \sqrt{-3a}$, $-3a = 9$
$\therefore\ a = -3$

19. $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

점$(1,0)$에서 시작이므로 $-\frac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0,-1)$를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

20. $a \le x \le 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x}+1$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x}+1 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

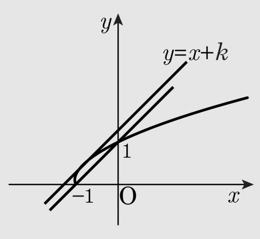
y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.
따라서, $x = a$에서 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{3-2a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$
$\therefore a = -11$
또한, $x = 1$에서 최솟값을 가지므로
$m = \sqrt{3-2\times1}+1 = 2$
$\therefore m-a = 13$

21. 두 집합 A $=\{(x,y) \mid y = \sqrt{x+1}\}$, B $=\{(x,y) \mid y = x+k\}$에서 $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=2$일 때, 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k<1$ ② $k>\frac{5}{4}$ ③ $1<k<5$
④ $1\le k<\frac{5}{4}$ ⑤ $1\le k\le\frac{5}{4}$

해설

$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=2$는 $y=\sqrt{x+1}$과
$y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 것을 의미한다.
(i) 두 그래프가 접할 때,
$\sqrt{x+1}=x+k$
$x+1=x^2+2kx+k^2(x\ge-1)$
$x^2+(2k-1)x+k^2-1=0\ (x\ge-1)$
이차방정식의 판별식을 D 라 하면
$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$
$-4k+5=0$
$\therefore k=\frac{5}{4}$
(ii) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때
$0=-1+k\quad\therefore k=1$
(i), (ii)에 의하여
$\therefore 1\le k<\frac{5}{4}$



22. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3x+4} - 2$ 에 대하여 $(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4)$ 의 값을 구하면?

① -1　　② $-\dfrac{3}{4}$　　③ $\dfrac{1}{3}$　　④ $\dfrac{2}{3}$　　⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$
\begin{aligned}
&(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4) \\
&= (g \circ (g^{-1} \circ f) \circ g)(4) \\
&= ((g \circ g^{-1}) \circ f \circ g)(4) \\
&= (f \circ g)(4)
\end{aligned}
$$

이때, $g(4) = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} - 2 = 2$ 이므로

구하는 값은 $f(g(4)) = f(2) = \dfrac{1}{3}$ 이다.

23. 무리함수 $y=-\sqrt{1-x}+2$의 역함수는?

① $y=(x-2)^2+1(x \le 2)$
② $y=(x-2)^2-1(x \le 2)$
③ $y=-(x-2)^2+1(x \le 2)$
④ $y=-(x-2)^2-1(x \le 2)$
⑤ $y=-(x+2)^2+1(x \le 2)$

해설

$y=-\sqrt{1-x}+2$에서 $1-x \ge 0$이므로 $x \le 1$
$y-2=-\sqrt{1-x} \le 0$이므로 $y \le 2$
$1-x=(y-2)^2,\ x=-(y-2)^2+1$
$x,\ y$를 바꾸면 구하는 역함수는
$\therefore y=-(x-2)^2+1(x \le 2)$

24. 두 실수 x, y 가 $x+y=-1,\ xy=2$을 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ② $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

해설

$x+y=-1,\ xy=2 \Rightarrow x<0,\ y<0$

$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (\because\ x<0,\ y<0)$

$=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{x}}=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

25. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $\dfrac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \dfrac{x}{x-\sqrt{x-1}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$　② $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$
④ $\dfrac{2+3\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

해설

$$\frac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \frac{x}{x-\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{\left\{(x-\sqrt{x-1}) + (x+\sqrt{x-1})\right\} x}{(x+\sqrt{x-1})(x-\sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{2x^2}{x^2-x+1}$$

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x-1 = \sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=5$

$\therefore\ x^2 = x+1$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{2x^2}{x^2-x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)-x+1} = x+1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}+1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

26. $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$일 때, $x^4 - 4x^3 + 4x + 5$의 값은?

① -2　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 9

해설

$x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$

$\therefore x - 2 = -\sqrt{3}$

$x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = -1$

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 4x + 5 &= x^2(x^2-4x) + 4x + 5 \\ &= -x^2 + 4x + 5 \\ &= -(x^2-4x) + 5 \\ &= 1 + 5 = 6 \end{aligned}$$

27. $f(x)$는 유리수를 계수로 하는 x의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$일 때, $a - b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ 0　⑤ 3

해설

$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}} = 2+\sqrt{3}$
$\therefore\ f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2+\sqrt{3})$
$= (2+\sqrt{3})^2 + a(2+\sqrt{3}) + b$
$= (7+2a+b) + (4+a)\sqrt{3} = 0$
그런데, $7+2a+b,\ 4+a$는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서
$7+2a+b=0,\ 4+a=0 \quad \therefore\ a=-4,\ b=1$
$\therefore\ a-b = -4-1 = -5$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3}$은 $x^2+ax+b=0$의 한 근이고, $a,\ b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해
두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$
$\therefore\ a-b = -4-1 = -5$

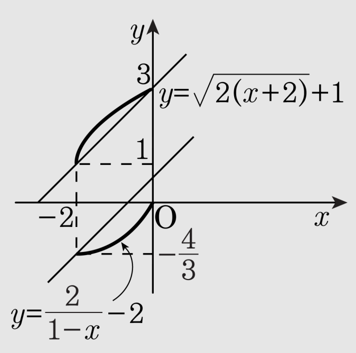
28. 정의역이 $\{x | -2 \le x \le 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$-2 \le x \le 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다

아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x+r$ 의 그래프가

$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다

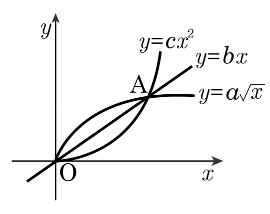
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

29. 양의 상수 a, b, c에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x}$, $y = bx$, $y = cx^2$의 그래프가 그림과 같이 원점 O와 다른 점 A에서 동시에 만날 때, a, b, c의 관계로 옳은 것은?



① $a^3 = b^2c$　② $a^3 = bc^2$　③ $b^3 = a^2c$

④ $b^3 = ac^2$　⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$과 $y = bx$의 교점의 x좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$\therefore\ x = \dfrac{b}{c}$

곡선 $y = a\sqrt{x}$와 $y = bx$의 교점의 x좌표 (단, $x \neq 0$)는

$a\sqrt{x} = bx \therefore\ x = \dfrac{a^2}{b^2}$

두 점이 일치하므로 $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a^2}{b^2}$

$\therefore\ b^3 = a^2c$

30. 두 함수 $f,\ g$ 가 $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ g(x)=\sqrt{x}+1$ 일 때, $0\le x\le 4$ 에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x}+1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+1+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$\sqrt{x}=t$ 로 놓으면

$0\le x\le 4$ 에서 $0\le t\le 2$ 이므로

주어진 함수는 $y=\dfrac{1}{t+2}(0\le t\le 2)$

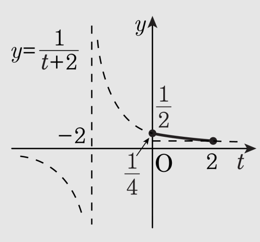
따라서 다음 그림에서 $t=0$ 일 때

최댓값은 $\dfrac{1}{2}$,

$t=2$ 일 때

최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이므로

구하는 합은 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$



31. $a = \sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}}$에 대하여 $f(x) = [x], g(x) = x - [x]$일 때, $\dfrac{14}{f(a)+g(a)} - \dfrac{2}{g(a)}$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2　　② $2+\sqrt{2}$　　③ $\dfrac{7}{2}$

④ 4　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$a = \sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}} = \sqrt{10-8\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{10-8(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{18-8\sqrt{2}}$

$= \sqrt{18-2\sqrt{32}}$

$\therefore a = 4-\sqrt{2} = 2.\times\times\times$

$[a] = 2,\ f(a) = [a] = 2$

$g(a) = a - [a] = 4-\sqrt{2}-2 = 2-\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{14}{f(a)+g(a)} - \dfrac{2}{g(a)} = \dfrac{14}{4-\sqrt{2}} - \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = 2$

32. $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$일 때 $x^3 - 3x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$의

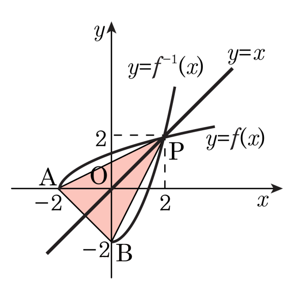
양변을 세제곱하면

$x^3 = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}x$

$= 4 + 3^3\sqrt{4-3}x = 4+3x$

$\therefore\ x^3 - 3x = 4$

33. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$에 대하여 $y = f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점을 A, $y = f^{-1}(x)$의 그래프와 y축이 만나는 점을 B라 하자. $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 교점을 P라고 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하면?



① 5　　② 6　　③ $4\sqrt{2}$

④ 8　　⑤ 10

해설

$y = f(x) = \sqrt{x+2}$ 의 정의역은 $\{x \mid x \geq -2\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $x = \sqrt{y+2}$

y 에 관하여 정리하면 $y = x^2 - 2$

따라서 $y = f^{-1}(x) = x^2 - 2$ 이고,

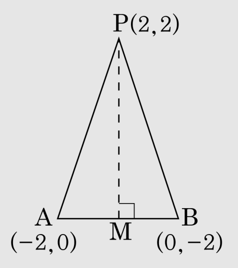
정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq -2\}$

이때, $y = f(x)$ 와

$y = f^{-1}(x)$ 의 교점은

$y = f(x)$ 와 $y = x$ 의

교점과 같다.



$\sqrt{x+2} = x,\ x+2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$,

$x = 2$ 또는 $x = -1$

$\therefore x = 2,\ y = 2(\because x > 0)$

$\therefore$ P$(2,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을 M이라 하면 M $(-1,\ -1)$

$\triangle$ABP는 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{PM}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PM}} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

따라서 $\triangle$ABP 의 넓이를 S라 하면

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{PM}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$