1. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$
④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

2. 명제「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$　　② $q \to p$　　③ $\sim p \to q$

④ $q \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \to \sim p$」도 참이다.

3. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

4. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』 임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n =$ (나) (단, k 는 자연수)
> 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$　　② 대우, $4k$　　③ 대우, $2k+1$
④ 역, $2k+1$　　⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'
∴ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$
∴ (나)– $2k$

5. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건 ② 필요조건
③ 대우 ④ 필요충분조건
⑤ 아무조건도 아니다.

해설
정삼각형 ⊂ 이등변삼각형

6. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b$, $q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5$, $q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0$, $q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz$, $q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p는 q 이기 위한 필요조건이다.

7. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$　　② $ab \ge 0$　　③ $a+b \ge 0$

④ $ab < 0$　　⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

8. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

9. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2(\quad ㉠ \quad) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $|a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

② $|ab|+ab$, $|ab|=-ab$, $ab \ge 0$

③ $|ab|-ab$, $|ab|=-ab$, $ab \le 0$

④ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

10. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{1+(-1)^2+4^2\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x-y+4z)^2$
$18(x^2+y^2+z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2 \geq 1$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 1이다.

11. 실수 x, y 에 대하여 조건 '$|x|+|y|=0$' 의 부정과 같은 것은?

① $x=y=0$

② $x=y\neq 0$

③ $x\neq 0$ 이고 $y\neq 0$

④ x, y 중 적어도 하나는 0 이다.

⑤ x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x|+|y|=0$ 의 부정은 $|x|+|y|\neq 0$ 이다.
따라서, $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$ 이므로 x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

12. 다음 <보기>의 조건 '$p(x)$ '를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

(1) $p(x)$: x는 12의 양의 약수이다.
$P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
(2) $p(x) : x^2 + 1 = 0$
$P = \varnothing$
(3) $p(x) : x^2 - 5x - 4 = 0$
$P = \{1, 4\}$
(4) $p(x) : x^2 + 4x + 5 > 0$
$P = R$

① (1), (2) ② (2), (3) ③ (3), (4)
④ (2), (4) ⑤ (1), (3)

해설

(1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \varnothing$
(3) $P = \left\{ \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

13. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

14. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 항상 옳은 것은?

$p : x > 2,\qquad q : x < 3,\qquad r : 2 < x < 3$

① $p \Rightarrow q$　　② $\sim p \Rightarrow r$　　③ $\sim q \Rightarrow r$

④ $q \Rightarrow r$　　⑤ $\sim p \Rightarrow \sim r$

해설

$p,\ q,\ r$ 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $R \subset P, R \subset Q$ 이므로 $r \rightarrow p,\ r \rightarrow q$

$\therefore$ 대우 : $\sim p \Rightarrow \sim r,\ \sim q \Rightarrow \sim r$

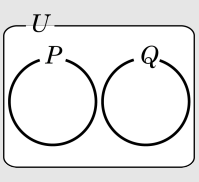
15. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. 명제 「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 옳은 것은 ?

① $P \cap Q = P$　　② $P \cap Q = Q$　　③ $P - Q = P$

④ $P^c \cup Q = U$　　⑤ $P \cap Q^c = \varnothing$

해설

$\sim q$ 를 만족시키는 집합은 Q^c 이고 $p \to \sim q$ 가 참이면 $P \subset Q^c$ 이므로 벤 다이어그램을 그리면 아래의 그림과 같다.



따라서, $P \cap Q = \varnothing$ 이므로 $P - Q = P$ 이다.

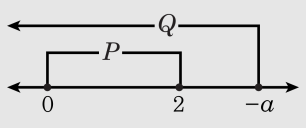
16. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

17. 두 조건 $p : 2 \le x < 5$, $q : a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10　② -9　③ -6　④ -5　⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P, 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \to q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.
$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \ge 5$ 이므로 $a < 1$, $a \ge -4$
따라서 $-4 \le a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 -4, -3, -2, -1, 0 이고 합은 -10 이다.

18. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
'$x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$a - a^2 + 2 = 0,\ a^2 - a - 2 = 0$
$(a+1)(a-2) = 0$
$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 2$
$a > 0$ 이므로 $a = 2$

19. 두 명제 $p \to \sim q$와 $r \to q$가 참일 때, 다음 보기 중 참인 명제는 <u>모두</u> 몇 개인가?

보기

㉠ $q \to \sim p$　　㉡ $q \to r$

㉢ $\sim q \to \sim r$　　㉣ $r \to \sim p$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다.

해설

두 명제 $p \to \sim q$와 $r \to q$가 참이므로 각각의 대우인 $q \to \sim p$와 $\sim q \to \sim r$도 참이다. 또, $p \to \sim q$와 $\sim q \to \sim r$로 부터 $p \to \sim r$이 참이고 그 대우 $r \to \sim p$도 참이다. 따라서 보기 중 참인 명제는 ㉠, ㉢, ㉣이다.

20. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cap B \neq \varnothing$　③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$　⑤ $A \cup B = U$

해설

$(A \cup B) - A = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = A$

21. 조건 $p : x-2 \neq 0$가 $q : x^2 - ax + 4 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$ 또, 어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이므로 $p \Rightarrow q$
즉,'$x-2=0$ 이면 $x^2 - ax + 4 = 0$이다'가 참이다.
$\therefore 4 - 2a + 4 = 0 \therefore a = 4$

22. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : _____ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.

23. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

24. P섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

① A, B는 P섬, C는 Q섬에서 왔다.

② A, B는 Q섬, C는 Q섬에서 왔다.

③ A, B, C는 모두 Q섬에서 왔다.

④ B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

⑤ B는 Q섬, A, C는 P섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q섬 사람이고 '우리 모두 Q섬 사람이다.'가 거짓이므로 B, C중 P섬 사람이 있어야 한다. 만일 B가 P섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q섬에서 왔다. 그러나 B가 Q섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

25. x, y가 실수이고 A, B, C를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q이기 위한 필요충분조건은?

① $p : x+y \geq 2$, $q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : |x|+|y| = 0$, $q : 3\sqrt{x}+3\sqrt{y} = 0$

③ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p : A \subset B \subset C$, $q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p : x+y$ 가 유리수이다. $q : x$, y 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2$ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x = 3$, $y = -3$)

② $|x|+|y| = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 0$

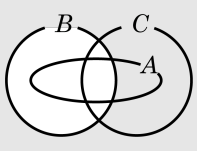
여기서 $|x|+|y| = 0$ 은 $x = 0$, $y = 0$ 과 같으므로

$x = 0$, $y = 0 \rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 0$ (충분조건)

(반례 : $x = 8$, $y = -8$)

③ $xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x$, y 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례 : $x = 1+\sqrt{2}$, $y = 1-\sqrt{2}$)

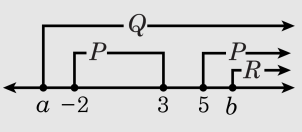
26. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같을 때, 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow p$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

p : $-2 \le x \le 3$ or $x \ge 5$
q : $x \ge a$
r : $x \ge b$

① 5　　② 3　　③ 0　　④ -3　　⑤ -5

해설

$r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 $R \subset P \subset Q$



$a \le -2,\ 5 \le b$

a 의 최댓값 -2, b 의 최솟값 5

$\therefore\ -2 + 5 = 3$

27. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$　　② $Q \subset P$　　③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$　　⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면, $P \subset Q^c$ 이다.
즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

28. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$　　② $a > c > b$　　③ $b > c > a$
④ $b > a > c$　　⑤ $c > b > a$

해설

$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0$　$\therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$ $\left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

29. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

> $P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$
> $=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$
> $\therefore P^2 \geq$ (가)
> 따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
> 등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$　② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore$ $P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because$ $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

30. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$ Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$ Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$ 이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$
$\geq 1+3+3+1 = 8$

31. 모든 실수 x, y 에 대하여 $(x+y)^2 \le k(x^2+y^2-xy)$ 가 성립하기 위한 실수 k 의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$　② 4　③ $2\sqrt{2}$　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

i) $y=0$ 일 때 준식은 $x^2 \le kx^2$

$\therefore k \ge 1 \cdots$ ㉠

ii) $y \ne 0$ 일 때 양변을 y^2 으로 나누면 준식은

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}\right\}$$

여기서 $\frac{x}{y}$ 를 t 로 치환하면

$t^2+2t+1 \le k(t^2+1-t)$

$\therefore (k-1)t^2-(k+2)t+(k-1) \ge 0 \cdots$ ㉡

㉡ 식이 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$k \ne 1$ 일 때 : $k-1>0$

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2=-3k(k-4) \le 0$

$\therefore k \ge 4 \cdots$ ㉢

$k=1$ 일 때 : $-3t \ge 0$ 은 모든 실수 t 에 대하여 성립할 수 없다.

$\therefore$ ㉠, ㉢에서 구하는 k 의 범위는 $k \ge 4$

32. $xy < 0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + y^2 \geq axy$가 성립할 때, 실수 a의 최솟값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

주어진 부등식의 양변을 xy로 나누면

$xy < 0$이므로 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq a$

즉 $\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right) \geq -a$

$-\frac{x}{y} > 0$, $-\frac{y}{x} > 0$이므로

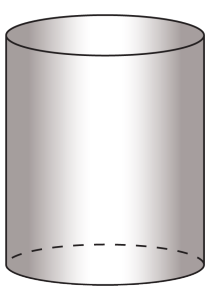
$\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right) \geq 2\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right)} = 2$

$\therefore 2 \geq -a$

$\therefore a \geq -2$

따라서, a의 최솟값은 -2 이다.

33. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S 라 하면
$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$
$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$
$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$
단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$ 일 때,
곧 $x = 2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.