1. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$

④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

2. 명제「$p \rightarrow \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$　② $q \rightarrow p$　③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$　⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \rightarrow \sim p$」도 참이다.

3. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

4. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』 임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n =$ (나) (단, k 는 자연수)
> 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$　　② 대우, $4k$　　③ 대우, $2k+1$

④ 역, $2k+1$　　⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'

$\therefore$ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$

$\therefore$ (나)– $2k$

5. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건 ② 필요조건

③ 대우 ④ 필요충분조건

⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

6. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b,\quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5,\quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3,\quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0,\quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz,\quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

7. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$ ② $ab \geq 0$ ③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

8. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \le 3^{3n}$

④ $2^{4n} \ge 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

9. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2(\quad ㉠ \quad) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0,\ |a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

10. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{1+(-1)^2+4^2\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x-y+4z)^2$
$18(x^2+y^2+z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2 \geq 1$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 1이다.

11. 실수 x, y 에 대하여 조건 '$|x| + |y| = 0$' 의 부정과 같은 것은?

① $x = y = 0$

② $x = y \neq 0$

③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$

④ $x,\ y$ 중 적어도 하나는 0 이다.

⑤ $x,\ y$ 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x| + |y| = 0$ 의 부정은 $|x| + |y| \neq 0$ 이다.
따라서, $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이므로 $x,\ y$ 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

12. 다음 <보기>의 조건 '$p(x)$ '를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

(1) $p(x)$: x는 12의 양의 약수이다.

$P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$

(2) $p(x) : x^2 + 1 = 0$

$P = \varnothing$

(3) $p(x) : x^2 - 5x - 4 = 0$

$P = \{1, 4\}$

(4) $p(x) : x^2 + 4x + 5 > 0$

$P = R$

① (1), (2) ② (2), (3) ③ (3), (4)

④ (2), (4) ⑤ (1), (3)

해설

(1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \varnothing$

(3) $P = \left\{ \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$

(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

13. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

14. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 항상 옳은 것은?

$p : x > 2,\qquad q : x < 3,\qquad r : 2 < x < 3$

① $p \Rightarrow q$ ② $\sim p \Rightarrow r$ ③ $\sim q \Rightarrow r$

④ $q \Rightarrow r$ ⑤ $\sim p \Rightarrow \sim r$

해설

$p,\ q,\ r$ 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $R \subset P, R \subset Q$ 이므로 $r \ \rightarrow\ p,\ r\ \rightarrow\ q$

$\therefore$ 대우 : $\sim p \Rightarrow \sim r,\ \sim q \Rightarrow \sim r$

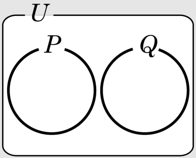
15. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. 명제 「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 옳은 것은 ?

① $P \cap Q = P$　　② $P \cap Q = Q$　　③ $P - Q = P$

④ $P^c \cup Q = U$　　⑤ $P \cap Q^c = \varnothing$

해설

$\sim q$ 를 만족시키는 집합은 Q^c 이고 $p \to \sim q$ 가 참이면 $P \subset Q^c$ 이므로 벤 다이어그램을 그리면 아래의 그림과 같다.



따라서, $P \cap Q = \varnothing$ 이므로 $P - Q = P$ 이다.

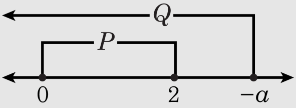
16. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

17. 두 조건 $p : 2 \leq x < 5$, $q : a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10 ② -9 ③ -6 ④ -5 ⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P, 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \to q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.

$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \geq 5$ 이므로 $a < 1$, $a \geq -4$

따라서 $-4 \leq a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 -4, -3, -2, -1, 0 이고 합은 -10 이다.

18. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

'$x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.' 가 참이므로

$a - a^2 + 2 = 0,\ a^2 - a - 2 = 0$

$(a+1)(a-2) = 0$

$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 2$

$a > 0$ 이므로 $a = 2$

19. 두 명제 $p \to \sim q$와 $r \to q$가 참일 때, 다음 보기 중 참인 명제는 모두 몇 개인가?

보기

ㄱ $q \to \sim p$

ㄴ $q \to r$

ㄷ $\sim q \to \sim r$

ㄹ $r \to \sim p$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

두 명제 $p \to \sim q$와 $r \to q$가 참이므로 각각의 대우인 $q \to \sim p$와 $\sim q \to \sim r$도 참이다. 또, $p \to \sim q$와 $\sim q \to \sim r$로 부터 $p \to \sim r$이 참이고 그 대우 $r \to \sim p$도 참이다. 따라서 보기 중 참인 명제는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

20. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cap B \neq \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

$(A \cup B) - A = \varnothing \iff A \cup B = A$

21. 조건 $p : x-2 \neq 0$가 $q : x^2 - ax + 4 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$ 또, 어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이므로 $\sim p \Rightarrow \sim q$

즉,'$x-2=0$ 이면 $x^2 - ax + 4 = 0$이다'가 참이다.

$\therefore 4 - 2a + 4 = 0 \therefore a = 4$

22. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 $p,\ q$ 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ **답 :** <u>조건</u>

▷ **정답 :** 충분<u>조건</u>

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.

23. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \; -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \; M=10,\; m=-10$

$\therefore \; M-m=10-(-10)=20$

24. P섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

① A, B는 P섬, C는 Q섬에서 왔다.

② A, B는 Q섬, C는 Q섬에서 왔다.

③ A, B, C는 모두 Q섬에서 왔다.

④ B 는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

⑤ B 는 Q섬, A, C 는 P섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q섬 사람이고 '우리 모두 Q섬 사람이다.'가 거짓이므로 B, C중 P섬 사람이 있어야 한다. 만일 B 가 P섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q섬에서 왔다. 그러나 B가 Q섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

25. x, y가 실수이고 A, B, C를 집합이라 할 때 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건은?

① $p : x+y \geq 2$, $q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : |x|+|y|=0$, $q : 3\sqrt{x}+3\sqrt{y}=0$

③ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p : A \subset B \subset C$, $q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p : x+y$가 유리수이다. $q : x$, y 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2$ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x=3$, $y=-3$)

② $|x|+|y|=0 \Rightarrow {}^3\sqrt{x}+{}^3\sqrt{y}=0$

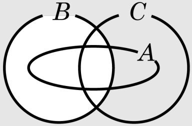
여기서 $|x|+|y|=0$ 은 $x=0$, $y=0$ 과 같으므로

$x=0$, $y=0 \rightarrow {}^3\sqrt{x}+{}^3\sqrt{y}=0$ (충분조건)

(반례 : $x=8$, $y=-8$)

③ $xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$가 유리수이다. $\leftarrow x$, y 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례 : $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$)

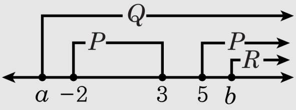
26. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같을 때, 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow p$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

p : $-2 \le x \le 3$ *or* $x \ge 5$
q : $x \ge a$
r : $x \ge b$

① 5 ② 3 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 $R \subset P \subset Q$



$a \le -2,\ 5 \le b$

a 의 최댓값 -2, b 의 최솟값 5

$\therefore\ -2+5=3$

27. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$　　② $Q \subset P$　　③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$　　⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \to \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면,$P \subset Q^c$ 이다.

즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

28. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$　② $a > c > b$　③ $b > c > a$

④ $b > a > c$　⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \ \left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

29. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$

$\therefore P^2 \geq$ (가)

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,

등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다) 에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$

④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}$$
$$+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore$ $P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because$ $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

30. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$이므로

Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$

Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$

Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$

Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$

$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$

$\geq 1+3+3+1 = 8$

31. 모든 실수 x, y에 대하여 $(x+y)^2 \le k(x^2+y^2-xy)$가 성립하기 위한 실수 k의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 4 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

ⅰ) $y=0$ 일 때 준식은 $x^2 \le kx^2$

$\therefore k \ge 1 \cdots$ ㉠

ⅱ) $y \ne 0$ 일 때 양변을 y^2 으로 나누면 준식은

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}\right\}$$

여기서 $\frac{x}{y}$ 를 t로 치환하면

$t^2+2t+1 \le k(t^2+1-t)$

$\therefore (k-1)t^2-(k+2)t+(k-1) \ge 0 \cdots$ ㉡

㉡ 식이 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$k \ne 1$ 일 때 : $k-1>0$

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2=-3k(k-4) \le 0$

$\therefore k \ge 4 \cdots$ ㉢

$k=1$ 일 때 : $-3t \ge 0$ 은 모든 실수 t에 대하여 성립할 수 없다.

$\therefore$ ㉠, ㉢에서 구하는 k의 범위는 $k \ge 4$

32. $xy < 0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + y^2 \geq axy$가 성립할 때, 실수 a의 최솟값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

주어진 부등식의 양변을 xy로 나누면

$xy < 0$이므로 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq a$

즉 $\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right) \geq -a$

$-\frac{x}{y} > 0, \ -\frac{y}{x} > 0$이므로

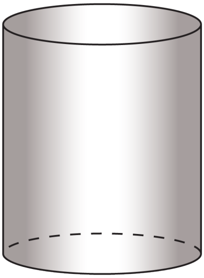
$$\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right) \geq 2\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right)} = 2$$

$\therefore 2 \geq -a$

$\therefore a \geq -2$

따라서, a의 최솟값은 -2 이다.

33. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$ 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원

④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x, 높이를 y라 하면,

부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠

철판의 넓이를 S 라 하면

$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$

$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$

$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$

단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$ 일 때,

곧 $x = 2$일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.