1. 평행이동 $f : (x, y) \to (x+2, y-1)$에 의하여 점$(-4, 8)$은 점$(a, b)$로 옮겨진다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+2$, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 변환이므로 $(-4+2, 8-1) = (a, b)$ 따라서 $a = -2$, $b = 7$

2. 평면위의 한 점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2,\ 5)$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+3,\ b+2)=(2,\ 5)$이므로 $a=-1,\ b=3$

따라서 $a+b=2$

3. $y = x^2 - 2x + 3$ 을 평행이동 $f : (x, y) \to (x+2, y-1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 2x + 4$
② $y = x^2 + 2x + 2$
③ $y = x^2 + 2x + 3$
④ $y = x^2 - 6x + 8$
⑤ $y = x^2 - 6x + 10$

해설

$f : (x, y) \quad \to \quad (x+2, y-1)$ 에서
$x + 2 = x', y - 1 = y'$ 라 하자.
$x = x' - 2 \quad y = y' + 1$ 을 주어진 식에 대입하면,
$y' + 1 = (x' - 2)^2 - 2(x' - 2) + 3$
$y' = x'^2 - 6x' + 10$에서 $y = x^2 - 6x + 10$

4. 직선 $x-2y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은?

① $x+2y+4=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x-2y-4=0$

④ $2x-y+4=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

5. 직선 $2x-y+3=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+3=0$ ② $2x-y-3=0$ ③ $2x+y-3=0$

④ $x-2y-3=0$ ⑤ $x-2y+3=0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.

따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

6. 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$의 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

② $x^2 + y^2 = 5$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

④ $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

⑤ $x^2 - y^2 + 2x + 4y = 0$

해설

원점대칭은 $x,\ y$부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x,\ y \to -y$를 대입한다.

7. 직선 $y=-3x+2$을 다음과 같이 대칭 이동 할 때, 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $(x$ 축$)$: $y=3x-2$

② $(y$ 축$)$: $y=-3x-2$

③ (원점) : $y=3x+2$

④ $(y=x)$: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

⑤ $(y=-x)$: $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

해설

① x 축 : $y=-3x+2 \rightarrow (-y)=-3x+2$

$\rightarrow y=3x-2$ (O)

② y 축 : $y=-3x+2 \rightarrow y=-3(-x)+2$

$\rightarrow y=3x+2$ (X)

③ 원점 : $y=-3x+2 \rightarrow (-y)=-3(-x)+2$

$\rightarrow y=-3x-2$ (X)

④ $y=x$: $y=-3x+2 - \rightarrow x=-3y+2$

$\rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ (O)

⑤ $y=-x$: $y=-3x+2 - \rightarrow (-x)=-3(-y)+2$

$\rightarrow y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ (X)

8. 직선 $y=2x$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R과 P 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a-4b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

R과 $\mathrm{P}(a,b)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{R}(b,a)$ 이고

Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로

$\mathrm{Q}(b-1,a)$ 이다.

또, P 와 Q 는 $y=2x$ 에 대하여 대칭이므로

$\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y=2x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $y=2x$는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$=\frac{b-a}{a-b+1}=-\frac{1}{2}\cdots$① 이고,

$$\frac{a+b}{2}=2\left(\frac{a+b-1}{2}\right)\cdots②$$

①에서 $a-b=1$

②에서 $a+b=2$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$, $2a-4b=3-2=1$

9. 점 $\mathrm{A}(-2, 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 할 때, 두 점 B, C 를 지나는 직선의 방정식은?

① $y = 2x - 3$ ② $y = 2x - 5$ ③ $y = x - 1$

④ $y = x - 3$ ⑤ $y = x - 5$

해설

점 $\mathrm{A}(-2, 3)$ 을 원점에 대하여
대칭이동한 점 B 의 좌표는 $(2, -3)$ 이고,
점 $\mathrm{A}(-2, 3)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 점 C 의 좌표는 $(3, -2)$ 이다.
따라서, 두 점 $\mathrm{B}(2, -3)$, $\mathrm{C}(3, -2)$ 를 지나는
직선의 방정식은

$$y + 3 = \frac{-2 + 3}{3 - 2}(x - 2), \, y + 3 = x - 2$$

$$\therefore y = x - 5$$

10. 원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$
② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
③ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$
④ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$은 중심이 $(3,\ 0)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
원의 중심 $(3,\ 0)$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여
대칭이동한 점을 $(a,\ b)$ 라 하면

$$\frac{3+a}{2} = 2,\ \frac{0+b}{2} = 1$$

$\therefore\ a = 1,\ b = 2$
원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는
그대로이므로 구하는 원은 중심이 $(1,\ 2)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
$\therefore\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

11. 원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 이 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 으로 옮겨질 때, $m+n+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 에서
$(x+1)^2+(y+3)^2=9$ 이므로
이 원의 중심은 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이는 3 이다.
한편, 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=5-r$ 이므로
이 원의 중심은 $(1,2)$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{5-r}$ 이다.
이때, 주어진 평행이동
$(x,y) \rightarrow (x+m,y+n)$ 에 의하여
처음 원의 중심 $(-1,-3)$ 은
옮겨진 원의 중심 $(1,2)$ 로 옮겨지므로
$(-1+m,-3+n)=(1,2)$
따라서, $-1+m=1$ 에서 $m=2$
$-3+n=2$ 에서 $n=5$
또한, 평행이동에 의하여 옮겨진 원의 크기는
변하지 않으므로 옮기기 전과 옮긴 후의
원의 반지름의 길이가 같다.
따라서, $\sqrt{5-r}=3$ 에서 $5-r=9$
$\therefore r=-4$
$\therefore m+n+r=2+5-4=3$

12. 직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 $f:(x,\ y)\to(x-2,\ y+1)$ 에 의하여 이동한 직선과 평행이동 $g:(x,\ y)\to(x+a,\ y-b)$ 에 의하여 이동한 직선이 일치할 때, $a,\ b$ 에 대한 관계식을 구하면?

① $a=-2b$　② $a=-b$　③ $a=b$

④ $a=2b$　⑤ $a=3b$

해설

평행이동 $f:(x,\ y)\to(x-2,\ y+1)$ 은
x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을
평행이동 f 에 의하여 이동하면
$(x+2)+2(y-1)-3=0$
$\therefore x+2y-3=0 \cdots\cdots$ ㉠
또한, 평행이동 $g:(x,y)\to(x+a,y-b)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-b$ 만큼
평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 g 에 의하여 이동하면
$(x-a)+2(y+b)-3=0$
$\therefore x+2y-a+2b-3=0 \cdots\cdots$ ㉡
이때, ㉠, ㉡이 일치해야 하므로
$-a+2b-3=-3$　$\therefore a=2b$

13. 점 $(x,\ y)$가 점 $(x+a,\ y+b)$로 옮겨지는 평행이동에 의하여 $x^2+y^2-6x+4y-36=0$이 원 $x^2+y^2=r^2$으로 옮겨질 때, $a+b+r$의 값은? (단, $r>0$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

주어진 원 $x^2+y^2-6x+4y-36=0$은
중심이 $(3,\ -2)$이고, 반지름이 7인 원이다.
그 원이 중심이 $(0,\ 0)$, 반지름이 r인 원으로 이동했으므로
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $+2$ 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $a=-3,\ b=2,\ r=7$

14. 직선 $3x-4y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동 한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $3x-4y+12=0$ ② $3x-4y-4=0$

③ $4x-3y+12=0$ ④ $-4x+3y+12=0$

⑤ $-4x+3y-4=0$

해설

1) x 축으로 -1 , y 축으로 2만큼 평행이동

$\Rightarrow 3(x+1)-4(y-2)+1=0$

$\Rightarrow 3x-4y+12=0$

2) $y=x$ 대칭

$\Rightarrow -4x+3y+12=0$

15. 직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1,\ 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이동한 직선의 방정식은 $5y + 12x + k = 0$

즉, $12x + 5y + k = 0$

이 직선과 점 $(1, 1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$\frac{|17 + k|}{13} = 2$$

$|k + 17| = 26$

$k + 17 = \pm 26$

$\therefore k = 9$ 또는 $k = -43$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$9 + (-43) = -34$

16. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(-1,\ 1)$

④ $(-1,\ -1)$ ⑤ $(1,\ -1)$

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ 이다.

17. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 다른 한 원은
서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$ 이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$가
직선 $y=ax+b\cdots$①에 대하여
대칭이므로 직선 ①은 점 $(-2,1)$과 점 $(0,0)$ 을 잇는 선분을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ① 위에 있고

기울기의 곱은 -1 이다.

$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$

$\therefore\ a=2,\ b=\frac{5}{2}$

따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

18. P $(3, 1)$을 직선 $x+y+1=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q (α, β) 라 할 때 $\alpha+\beta$ 의 값은?

① 1 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

직선 PQ 가 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
기울기는 1 이다.

$\dfrac{\beta-1}{\alpha-3}=1\cdots$ ㉠

점 P, Q 의 중점 $\left(\dfrac{\alpha+3}{2}, \dfrac{\beta+1}{2}\right)$ 이 직선
$x+y+1=0$ 위 에 있으므로

$\dfrac{\alpha+3}{2}+\dfrac{\beta+1}{2}+1=0\cdots$ ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-2,\ \beta=-4$
따라서 $\alpha+\beta=-6$ 이다.

19. 두 점 $A(-6,\ 1)$, $B(2,\ 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
$\overline{AB}$ 의 중점 $(-2,\ 3)$ 은 직선
$y = ax + b$ 위에 있다.
$\therefore\ 3 = -2a + b\ \cdots$ ㉠
또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로
$(\overline{AB}$ 의 기울기$)\ \times a = -1$ 에서

$$\frac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$$

$\therefore\ a = -2$ $a = -2$ 를 ㉠ 에 대입하면
$b = -1$ $\therefore\ a + b = -3$

20. 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=8$을 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동시켰더니 원 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$이 되었다. 이 때, $a+b+c$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 $(a,\ b)$라 하면,

$x^2+y^2=8$의 중심 $(0,\ 0)$과 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$의 중심인 $(4,\ 2)$의 중점은 $y=ax+b$ 위를 지나고,

두 점을 이은 직선과 $y=ax+b$는 수직이다.

따라서 중점인 $(2\ ,\ 1\ )$를 $y=ax+b$에 대입하면 $1=2a+b$.

수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로

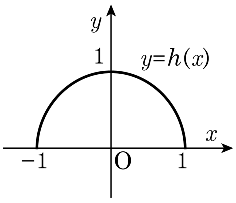
$y=ax+b$의 기울기가 a이므로

두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$,

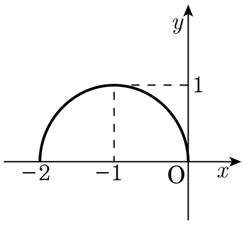
따라서 $a=-2$, $b=5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20-c=8$.

$c=12$

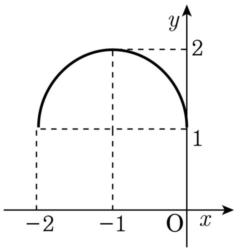
21. 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)+1$, $h(x) = g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y = f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



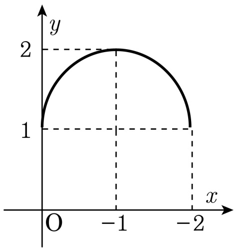
①



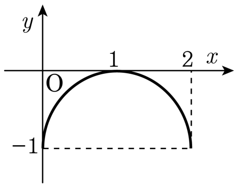
②



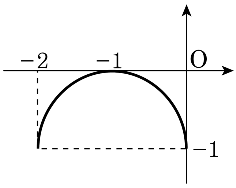
③



④

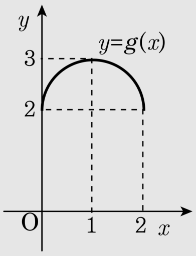


⑤

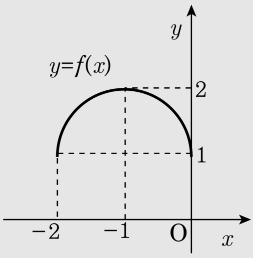


해설

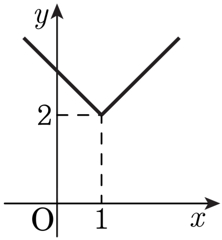
$y = h(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
$y = g(x)$ 의 그래프는 $y = h(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.
따라서, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



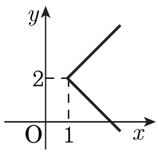
또, $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는
$y = g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



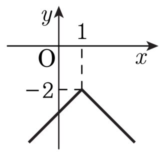
22. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은?



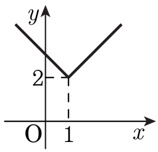
①



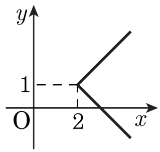
②



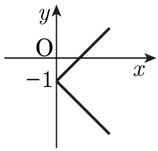
③



④



⑤



해설

도형 $f(x, y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y, x) = 0$ 이 된다.
따라서 $(1,\ 2)$ 는 $(2,\ 1)$ 로 이동되며,
도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

23. 다음 중 원 $x^2+y^2+8x+8y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{5}$

② $x^2+y^2=3$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=16$

④ $(x+1)^2+y^2=4$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{3}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+8x+8y+16=0$ 에서 $(x+4)^2+(y+4)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ③이다.

24. 좌표평면 위의 점 P(x, y) 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 A(6, 5) 에서 출발하여 이떤 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다. ㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1만큼 이동한다. ㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$

$\therefore$ 5 회 이동한다.

25. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$ ② $a^2+b^2=9$ ③ $a^2+b^2=16$

④ $a^2+b^2=25$ ⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠

원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,

y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$

$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡

원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$

$\therefore\ a^2+b^2=36$

26. 원점에 대하여 대칭 이동하였을 때, 자기 자신과 일치하는 도형의 방정식을<보기>에서 모두 고르면?

<보기>

㉠ $y=-x$

㉡ $|x+y|=1$

㉢ $x^2+y^2=2(x+y)$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $y=-x$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은 $-y=-(-x)$ 이다.

㉡ $|x+y|=1$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은 $|-x-y|=1$ 이므로 $|x+y|=1$

㉢ $x^2+y^2=2(x+y)$ 를 원점에 대하여 대칭 이동 한 도형의 방정식은 $(-x)^2+(-y)^2=2(-x-y)$ 이므로 $x^2+y^2=-2(x+y)$

27. 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y-1=0$ ③ $x+2y-1=0$

④ $x+2y+1=0$ ⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭)하면 $2x-y+1=0$

B(y축 대칭)하면 $-2x-y+1=0$

C(원점 대칭)하면 $2x+y+1=0$이므로

$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.

$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭)하면 $2y+x+1=0$

$\therefore\ x+2y+1=0$

28. 원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원을 O′ 이라고 하자. 두 원 O, O′ 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6,\ 2)$ 를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, ab의 값을 구하면?

① -8　　② -12　　③ 8　　④ 12　　⑤ 0

해설

원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
O′ : $(x+1)^2+y^2=1$
두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면
O : $x^2+y^2-2y=0$, O′ : $x^2+y^2+2x=0$
이 때, 직선 AB의 방정식은 $2x+2y=0$,
즉 $y=-x$
따라서 점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2,\ -6)$이므로
$a=-2,\ b=-6\quad \therefore ab=12$

29. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m 의 값들의 합을 구하면?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면

$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \cdots\cdots$ ㉠

이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3, 2)$사이의 거리는 2이어야 한다.

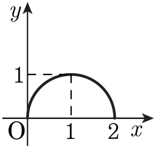
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

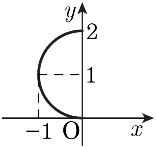
$9m^2+12m+4=4m^2+4$

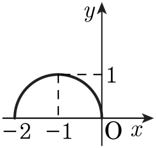
$\therefore\ 5m^2+12m=0$

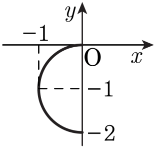
따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$

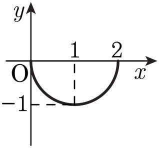
30. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

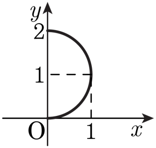


①


②


③


④


⑤


해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

31. 점 $(1, 2)$ 에 대한 점 (a, b) 의 대칭점을 (a', b') 이라 하고, 점 (a, b) 가 직선 $y = 3x + 1$ 위를 움직일 때, 다음 중 점 (a', b') 이 움직이는 도형 위의 점은?

① $(-1, 2)$ ② $(0, -1)$ ③ $(1, 0)$

④ $(2, 1)$ ⑤ $(3, 5)$

해설

$y = 3x + 1$ 위의 점 $(a,\ b)$ 와 대칭점 $(a',\ b')$ 의 중점이 $(1,\ 2)$ 이므로

$$\frac{a' + a}{2} = 1,\quad \frac{b' + b}{2} = 2$$

$a' = 2 - a,$

$b' = 4 - b = 3 - 3a \quad (\because\ b = 3a + 1)$

$\therefore\ (a',\ b') = (2 - a,\ 3 - 3a)$

$x = 2 - a, y = 3 - 3a$ 라 하고 a 를 소거하면

$y = 3 - 3(2 - x)\ ,\quad y = 3x - 3$

즉 (a', b') 은 직선 $y = 3x - 3$ 위를 움직인다.

$\therefore\ (1,\ 0)$ 이 이 직선 위에 있다.

32. 직선 $y = 2x + 1$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$

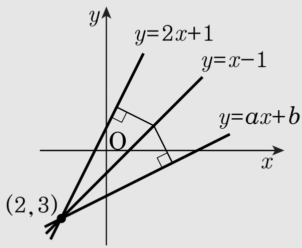
② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y + 3 = 0$

④ $2x - 3y + 4 = 0$

⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과$y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.

$\therefore 3 = 2a + b$

ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서
$y = 2x + 1,\ \ y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.
$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한
$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면

$a = 2,\ \ b = 1$ 또는 $a = \dfrac{1}{2},\ \ b = -2$

$\therefore \quad y = \dfrac{1}{2}x - 2$

($\because\ y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)

33. 정점 $A(3,\ 2)$ 과 직선 $y=x+1$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 가 최소가 되는 거리는?

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{10}$ ④ $4\sqrt{10}$ ⑤ $5\sqrt{10}$

해설

점$(x,\ y)$ 를 직선 $y=x+k$ 에 대하여
대칭이동하면 $(y-k,\ x+k)$
점 A 의 $y=x+1$ 에 대한 대칭점을 A′ ,
점 A 의 x 축에 대한 대칭점을 A″ 이라 하면
$A'(1,\ 4),\ \ A''(3,\ -2)$
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}=$
$\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}\geq\overline{A'A''}$ 이므로
한편, $\overline{A'A''}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$
따라서, 최솟값은 $2\sqrt{10}$