

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

2. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$

② $k > -5$

③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$

⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k+5$$

이 때, $k+5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

3. 중심이 직선 $y = x + 3$ ($x > 0$) 위에 있고, 점 $(1, 2)$ 를 지나며 또 x 축에 접하는 원의 반지름은?

① 2 ② 5 ③ 10 ④ 12 ⑤ 15

해설

중심을 $(a, a + 3)$ 이라 하면 반지름이 $a + 3$ 이므로 원의 방정식은 $(x - a)^2 + (y - a - 3)^2 = (a + 3)^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
①이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 $(1 - a)^2 + (2 - a - 3)^2 = (a + 3)^2 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0$
 $\Rightarrow (a + 1)(a - 7) = 0$
 $\Rightarrow a = 7$ ($\because x > 0 \Rightarrow a > 0$)
 $\therefore$ 반지름 : $a + 3 = 7 + 3 = 10$

4. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면

제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면

중심이 (r, r) 이다.

$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,

$(r-1)(r-5) = 0$

$\therefore r = 1$ 또는 5

$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$\therefore 1 + 5 = 6$

5. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

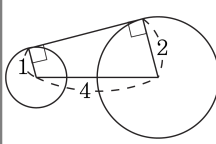
따라서 공통접선은 3 개이다.

6. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면
 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ 이다.



7. 점(2, 1)을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1)에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

8. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$
④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

9. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 (5, 0)이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

10. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m=2, r=3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

11. 세 점 P(-2, -4), Q(1, 5), R(5, 3) 을 지나는 원의 중심의 좌표는 (a, b) 이고, 반지름의 길이는 r 이다. 이 때, $a + b + r$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

P(-2, -4), Q(1, 5), R(5, 3)
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$$\begin{cases} (-2 - a)^2 + (-4 - b)^2 = r^2 \dots \textcircled{㉠} \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 \dots \textcircled{㉡} \\ (5 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \dots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

㉠, ㉡ 식 연립 :
 $a + 3b = 1 \dots \textcircled{㉤}$
㉡, ㉢ 식 연립 :
 $2a - b = 2 \dots \textcircled{㉥}$
㉤, ㉥ 식 연립 :
 $a + b = 1 \dots \textcircled{㉦}$
㉤, ㉦ 연립하면 $b = 0, a = 1$
㉠ 식에 $(-2 - 1)^2 + (-4 - 0)^2 = r^2$
 $\therefore r^2 = 25$
 $\therefore r = 5$
 $a + b + r = 1 + 0 + 5 = 6$

12. 중심이 직선 $y = x + 3$ 위에 있고 점 $(6, 2)$ 를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2

② 5

③ 7

④ 14

⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a, a + 3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a - 3)^2 = (a + 3)^2$$

이 원이 $(6, 2)$ 를 지나므로

$$(6 - a)^2 + (a + 1)^2 = (a + 3)^2 \text{ 에서}$$

$$(a - 2)(a - 14) = 0$$

$$\therefore a = 2, 14$$

원의 반지름중 작은 것은 $a + 3 = 2 + 3 = 5$

13. 두 점 $A(0, 0)$, $B(0, 6)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 $2:1$ 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

$$\Rightarrow \text{내분점은 } \left(0, \frac{2 \times 6}{2+1}\right) = (0, 4)$$

$$\Rightarrow \text{외분점은 } \left(0, \frac{2 \times 6}{2-1}\right) = (0, 12)$$

$\therefore$ 중심은 $(0, 8)$ 이고, 반지름이 4 인 원

$$\Rightarrow \text{넓이는 } \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

14. 점 A(7, 7)과 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = 4$ ② $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$
③ $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 1$ ④ $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 1$
⑤ $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$

해설

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면
A(7, 7), $P(a, b)$ 의 중점의 좌표 $M(x, y)$ 는
 $M\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$ 이다.
 $\therefore x = \frac{a+7}{2}, y = \frac{b+7}{2}$
 $\therefore a = 2x-7, b = 2y-7$
이 때, 점 P 는 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$
위의 점이므로 $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 4$ 가 성립한다.
 $(2x-8)^2 + (2y-8)^2 = 4$
 $\therefore (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$

15. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ 에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 9$

16. 실수 a, b 와 두 원

$$A : (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$B : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 3 \text{ 에 대하여}$$

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a + b = -3$

② $a - b = -2$

③ $a - b = -1$

④ $a^2 + b^2 = 1$

⑤ $a^2 + b^2 = 2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(-1, 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

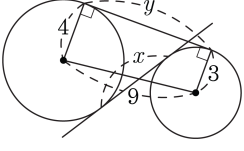
$$(a + 1)x + (b - 1)y = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$(a + 1) \times (-1) + (b - 1) \times 1 = 0$$

$$\therefore a - b = -2$$

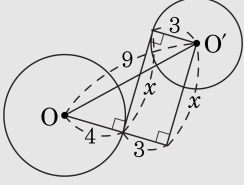
17. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x , y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



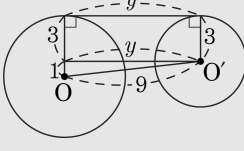
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$$9^2 = (4 + 3)^2 + x^2 \quad \therefore x^2 = 9^2 - 7^2$$



$$9^2 = y^2 + (4 - 3)^2 \quad \therefore y^2 = 9^2 - 1^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 = 112$$

18. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

19. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

20. 다음 <보기> 중에서 점 (2, 1) 을 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고르면?

보기

㉠ $x = 2$

㉡ $y = 1$

㉢ $3x + 4y + 5 = 0$

㉣ $4x - 3y - 5 = 0$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

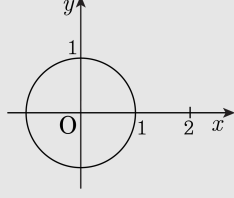
해설

㉠ $x = 2$ 에서 점 (2,1)만 지나고 원에 접하지 않는다. (×)

㉡ $y = 1$ (○)

㉢ $3x + 4y + 5 = 0$ 은 (2,1)을 지나지 않는다. (×)

㉣ $4x - 3y - 5 = 0$ 은 (2,1)을 지나고 거리가 $\frac{|-5|}{\sqrt{25}} = 1$ 이므로 접한다. (○)



21. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 밖의 점 $(-1, 2)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을 구하면?
- ① $x - 2y = 4, y = 2$ ② $3x + 4y = 1, x = -1$
- ③ $4x - 3y = 5, x = -1$ ④ $4x - 3y = 5, y = 2$
- ⑤ $3x + 4y = 5, x = -1$

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고 점 $(-1, 2)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = m(x + 1) + 2 = mx + m + 2$$

$$\therefore mx - y + m + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가

원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|m + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1, |m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변에 제곱을 하여 정리하면

$$m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1$$

$$\therefore m = -\frac{3}{4}$$

$$m = -\frac{3}{4} \text{ 을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 정리하면}$$

$$3x + 4y - 5 = 0$$

한편, 점 $(-1, 2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선 중 y 축과

평행한 접선 을 가지므로 $x = -1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $3x + 4y = 5, x = -1$

22. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

- 23.** 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2 |x| \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 = 2 |x + y| \cdots \textcircled{L}$$

㉠)과 ㉡)에서 $2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x + y$

$$\therefore x + y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{c}$$

㉠과 ㉡의 교점의 개수는 다음 그림

에서 5개이다.

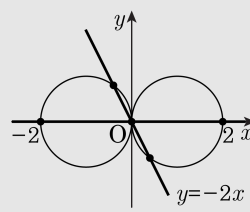
실제로, 교점을 구하면

$(0, 0), (\pm 2, 0),$

$$\left(\pm \frac{2}{\sqrt{e}}, \mp \frac{4}{\sqrt{e}} \right)$$

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

(보브호도스)



24. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 (a, b) 이므로 $b = a + 1$
따라서 $(a, a + 1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$$\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$$
$$= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$$
양변을 제곱하여 정리하면
$$(a-5)^2 = (a+3)^2$$
$$16a = 16$$
$$\therefore a = 1$$
$$\therefore (a, b) = (1, 2)$$
따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$

25. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은 ?

- ① 2 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

해설

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$
두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면

$$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$4x - ky + 10 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$ 은 일치해야 하므로

$$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$$

$$\therefore k = 2, m = -\frac{5}{2}$$

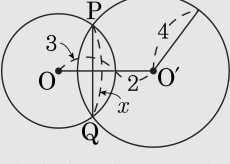
$$\therefore m + k = -\frac{1}{2}$$

26. 두 원 O 와 O' 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

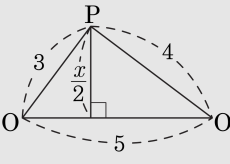
- ① 4
- ② 4.2
- ③ 4.4
- ④ 4.6
- ⑤ 4.8

해설

$\overline{PQ}$ 를 x 라 하면,



확대해보면 두 교점을 P, Q 라 하면,



삼각형의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{x}{2}$

$\therefore x = \frac{24}{5} = 4.8$

27. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

- ① -18 ② 18 ③ -22 ④ 22 ⑤ 0

해설

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$ 이고

그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는 $4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$
 $3x - y + n = 0$ 과 $(2, -3)$ 의 거리
 $\frac{|6 + 3 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}$
 $|9 + n| = 10$
 $\therefore n = \pm 10 - 9 = 1 \text{ or } -19$
 $\therefore 1 - 19 = -18$

28. 반지름의 길이가 10, 중심좌표가 $O(0, 0)$ 인 원 밖의 한 점 $P(11, 12)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선을 극선이라고 한다. 이 극선의 방정식이 $px + qy = 100$ 일 때, $p + q$ 를 구하여라.

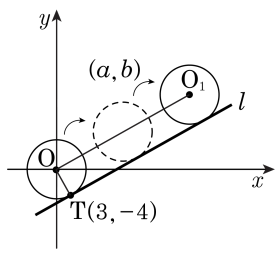
▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

원 위의 두 접점을 $Q_1(a_1, b_1)$, $Q_2(a_2, b_2)$ 라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x + b_1y = 100$, $a_2x + b_2y = 100$ 이고
두 직선은 동시에 $P(11, 12)$ 를 지나므로
 $11a_1 + 12b_1 = 100$, $11a_2 + 12b_2 = 100$ 이 함께 성립한다.
이것은 $11x + 12y = 100$ 위에 두 점 $Q_1(a_1, b_1)$,
 $Q_2(a_2, b_2)$ 가 동시에 있는 것을 의미하므로
직선 Q_1, Q_2 의 방정식은
 $11x + 12y = 100$ 이다.
따라서 $p = 11$, $q = 12$ $\therefore p + q = 23$

29. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 $T(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O' 의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 $T(3, -4)$ 에서 원 O 와 접하므로 직선 OT 과 직선 l 은 수직이다.

이 때, 직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한 편, 원 O' 의 중심이 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO' 의 기울기와 같고,

직선 OO' 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore \frac{b}{a} = (\text{직선 } OO' \text{의 기울기}) = (\text{직선 } l \text{의 기울기}) = \frac{3}{4}$

30. 원 $x^2+y^2+4x+2y+4=0$ 위를 움직이는 점 P 에서 직선 $3x+4y=10$ 까지의 거리를 $d(p)$ 라 할 때 $d(p)$ 의 최소값은 ?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$x^2+y^2+4x+2y+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=1$
 $d(p)$ 의 최소값은 원의 중심 $(-2,-1)$ 에서
직선 $3x+4y=10$ 까지 거리에서 반지름을 뺀 값이므로
 $\frac{|3 \times (-2) + 4(-1) - 10|}{\sqrt{3^2+4^2}} - 1 = \frac{20}{5} - 1 = 3$

31. 두 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 넓이의 최솟값은?

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

해설

두 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되는 경우는 그 원이 주어진 두 원의 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원일 때이다.

이 때, 주어진 두 원의 공통현의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y - (x^2 + y^2 + 2x - 4) &= 0 \\ -2y - 2x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y = -x + 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 원의 교점은 공통현 $\textcircled{1}$ 과 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 의 교점과 같으므로 $\textcircled{1}$ 을 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + (-x + 2)^2 - 2(-x + 2) = 0$$

$$2x^2 - 2x = 0,$$

$$2x(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서, 두 교점은 $(0, 2), (1, 1)$ 이고, 이 두 점이 넓이가 최소인 원의 지름의 양 끝점이므로 이 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그러므로 구하는 원의 넓이의 최솟값은

$$\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

32. 한 점 $P(a, b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2 = 4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2 = 9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 점 $P(a, b)$ 의 자취를 구하면?

- ① $2a - 3b - 7 = 0$
- ② $2a - 3b + 7 = 0$
- ③ $a^2 + b^2 = 3$
- ④ $a^2 + b^2 = 4$
- ⑤ $a^2 + b^2 = 5$

해설

$(x-4)^2+(y+1)^2 = 4, (x-2)^2+(y-2)^2 = 9$
문제의 조건에서
 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $(\overline{PA})^2 = (\overline{PB})^2$
 $\Rightarrow (\overline{PC_1})^2 - r_1^2 = (\overline{PC_2})^2 - r_2^2$

원의 중심 $C_1 = (4, -1), C_2 = (2, 2)$,
반지름 $r_1 = 2, r_2 = 3$
 $\therefore (a-4)^2 + (b+1)^2 - 4 = (a-2)^2 + (b-2)^2 - 9$
 $\therefore$ 위를 정리하면 $2a - 3b - 7 = 0$

33. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?
- ① $\pi + 1$ ② $\pi + 2$ ③ $3\pi + 1$
 ④ $3\pi + 2$ ⑤ $3\pi + 4$

해설

(구하는 넓이)

$$= \left\{ \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right\} \times 2$$

$$= 3\pi + 2$$