1. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

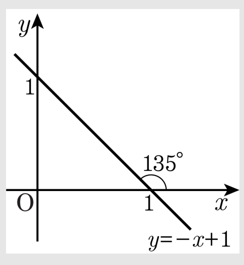
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

▷ 정답 : x 축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



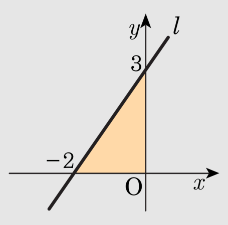
2. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

3. 세 점 A $(2,\ 1)$, B $(-k+1,\ 3)$, C $(1,\ k+2)$가 같은 직선위에 있도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-\mathrm{k}+1,3)$, $\mathrm{C}(1,\mathrm{k}+2)$ 가 같은 직선 위에 있으려면
직선 AB 와 AC 의 기울기가 같아야 하므로

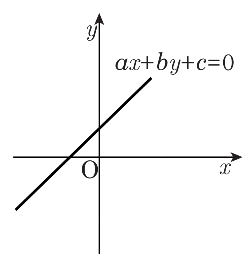
$$\frac{3-1}{(-k+1)-2} = \frac{(k+2)-1}{1-2}$$

$$\frac{2}{-k-1} = \frac{k+1}{-1},$$

$(k+1)^2 = 2$,

$\therefore\ k = -1 \pm \sqrt{2}$ 따라서 구하는 합은 $(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2}) = -2$

4. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{a}{b} < 0$

y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{c}{b} < 0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$

마찬가지로 일차함수 $cx+ay+b=0$ 은

$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a} < 0$

y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

5. 두 점 $\mathrm{A}(3, 2)$, $\mathrm{B}(a, b)$를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2$$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\,\frac{2b+2}{3}-3=0,$$

$a+2b-1=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ 3a+b=5$

6. 세 직선 $2x-y-4=0$, $x-2y-2=0$, $y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠

$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡

$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$0=2a+2$, $2a=-2$

$\therefore \quad a=-1$

7. 서로 수직인 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=2x$ 의 교점을 H 라 할 때, H 의 좌표는 ( ) 이다. 따라서, 원점에서 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 까지의 거리는 ( ) 이다. 위의 ( ) 안에 알맞은 것을 차례대로 나열하면?

① $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$

③ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$

⑤ $(1, 2), \sqrt{5}$

해설

두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=2x$ 의 교점

H 의 좌표는 $-\frac{1}{2}x+2=2x$, $-x+4=4x$

이고 $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{8}{5}$ 이다. 즉, $H\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 이므로

따라서 $\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

8. 점 $\mathrm{P}(1, 2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)

$=$ (점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=\frac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

9. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

10. $A(0,-2), B(3,3), C(4,0)$ 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$

또, 직선 BC 의 방정식은 $3x + y - 12 = 0$ 이므로

$A(0,-2)$ 로부터 직선 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AH} = \dfrac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{10}}$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 7$

11. 두 이차함수 $y=-x^2+3$과 $y=x^2-4x+3$의 그래프의 꼭지점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 x절편은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$y=-x^2+3$ 의 꼭지점은 $\mathrm{A}(0,3)$ 이고,
$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 꼭지점은 $\mathrm{B}(2,-1)$ 이다.
이 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,3)$,$\mathrm{B}(2,-1)$을 지나는
직선의 방정식은 $y=-2x+3$
따라서, x절편은 $0=-2x+3$에서
$x=\frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}$ 이다.

12. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$y = \dfrac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \dfrac{1}{2}x - 4$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

13. 세 점 A $(2,\ 3)$, B$(-1,\ 5)$, C$(4,\ a)$이 일직선 위에 있을 때, a의 값은?

① -1　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{2}{5}$　④ $-\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

세 점이 일직선 위에 있기 위해서는
직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로
$\frac{3-5}{2+1}=\frac{a-5}{4+1}$에서
$\therefore a=\frac{5}{3}$

14. 세 점 A$(3,\ a)$, B$(2,\ 1)$, C $(a+4,\ 2)$이 일직선 위에있을 때, 실수 a의 값들의 곱은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 기울기는 같다.
$\overline{AB}$의 기울기와 $\overline{BC}$의 기울기가 같으므로
$\frac{1-a}{2-3} = \frac{2-1}{(a+4)-2}$, $\frac{a-1}{1} = \frac{1}{a+2}$
$(a-1)\cdot(a+2) = 1$, $a^2+a-3=0$
$\therefore$ 실수 a의 값의 곱은 -3

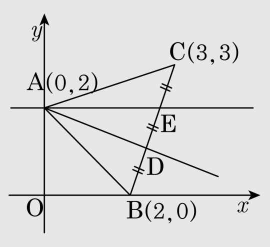
15. 점 $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
$A(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle ABC$ 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

$D\left(\frac{7}{3},1\right)$, $E\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because$ k 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

16. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠ ,
$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.
㉠과 ㉡은 서로 직교하므로
$pp'+qq'=0$이다.
(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의
전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은
$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢
㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로
㉢의 판별식 $\mathrm{D}_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$
$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.
따라서 ㉣의 판별식 $\frac{\mathrm{D}_2}{4}$는 0이다.
$\frac{\mathrm{D}_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$
$\therefore\ b=-4$
$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

17. x 축 위의 점 $(a, 0)$ 에서 직선 $y = 2x$ 까지의 거리가2 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ 3

해설

점 $(a,\ 0)$ 에서 직선 $y = 2x$, 즉 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 2 이므로 $\frac{|2 \times a - 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$ 이다.

$2a = 2\sqrt{5}$ ($\because$ a 는 양수) $\therefore$ $a = \sqrt{5}$

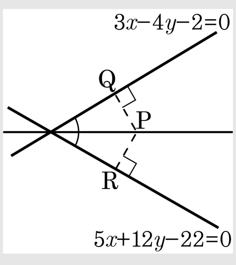
18. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

19. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다. Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다. Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
$\mathrm{P}(a,\ b)$ 라고 하면
$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$
$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

20. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$ ② $2x+3y+1=0$
③ $4x-3y+1=0$ ④ $x-4y-3=0$
⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를
$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,
$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$
$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$
이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면
$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$
$4X+2Y-3=0$
$\therefore\ 4x+2y-3=0$

21. 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}=2$, $b-2=2(a-3)$, $b=2a-4\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1 로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \dfrac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\dfrac{2a+3}{3},\ \dfrac{2b+2}{3}\right)$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{2a+3}{3}+2\cdot\dfrac{2b+2}{3}-3=0$

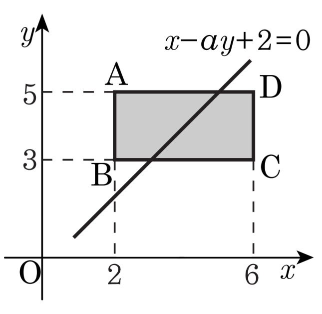
$\therefore\ a+2b-1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{9}{5}$, $b=-\dfrac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

22. 다음 그림에서 □ABCD 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x-ay+2=0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$

즉 $(4,4)$ 이다.
직선 $x-ay+2=0$ 이 점 $(4,4)$ 를 지나야 한다.
따라서 $(4,4)$ 를 대입하면 $4-4a+2=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

23. 두 직선 $y = ax$와 $y = bx$가 서로 수직이고, 직선 $x = 2$와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$이다. 이때, $|a-b|$의 값은? (단, $a > 0$, $b < 0$)

① 1　　② 2　　③ $\frac{3}{2}$　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 4

해설

$\mathrm{P}(2, 2a)$, $\mathrm{Q}(2, 2b)$

$\therefore$ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad a + b = \frac{3}{2} \quad \cdots$ ㉠

$y = ax$와 $y = bx$가 서로 수직이므로

$a \times b = -1 \quad \cdots$ ㉡

$\therefore \quad (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$이므로

$(a-b)^2 = \frac{9}{4} + 4$

$\Rightarrow \quad a - b = \frac{5}{2} \quad (\because\ a > 0,\ b < 0)$

24. 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4 \cdots$ ㉠

$\overline{AB}$ 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점은

$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore a+2b-1=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

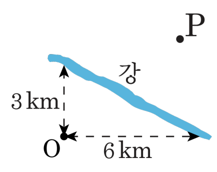
25. 점 $(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx-ay=1$이 항상 지나는 정점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$　③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$　⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

$(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직이므로
$3a+2b=6$
$\therefore\ b=3-\frac{3}{2}a\cdots$ ㉠
㉠을 $2bx-ay=1$에 대입하면
$2\left(3-\frac{3}{2}a\right)x-ay=1$
$(6-3a)x-ay=1$
$(6x-1)-(3x+y)a=0$
$\therefore\ 6x-1=0,\ 3x+y=0$
$x=\frac{1}{6},\quad y=-\frac{1}{2}$
$\therefore\ \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

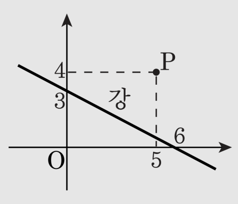
26. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$

이때, 마을 P 의 좌표는 $(5,\ 4)$ 이다.

따라서, 점 $(5,\ 4)$ 에서 직선 $x+2y-6=0$ 까지의 거리를 구하면

$\frac{|5+8-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$

27. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2　　② -1 또는 2　　③ 4

④ -2 또는 4　　⑤ 0 또는 4

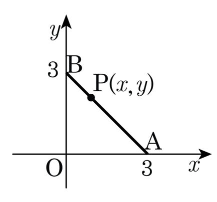
해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots$ ①
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$

양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

28. $b \geq a > 0,\ c \geq 0$ 이면 $\dfrac{a+c}{b+c} \geq \dfrac{a}{b}$ 가 성립한다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 A$(3,\ 0)$, B$(0,\ 3)$ 에 대하여 점 P$(x,\ y)$ 가 선분 AB 위를 움직일 때, $\dfrac{5-y}{5+x} \times \dfrac{5-x}{5+y}$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{3}{4}$　⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

직선 AB 의 방정식은

$y = -x + 3$ 이므로 $x + y = 3$

$$\therefore\ \frac{5-y}{5+x} \times \frac{5-x}{5+y} = \frac{25-5(x+y)+xy}{25+5(x+y)+xy}$$

$$= \frac{10+xy}{40+xy} \geq \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$(\because\ xy \geq 0)$

(단, 등호는 $xy = 0$ 일 때,

점 P가 A 또는 B일 때 성립한다.)

따라서, 구하는 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이다.

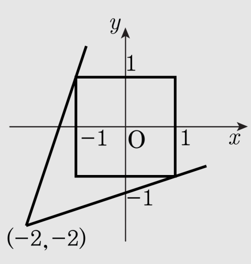
29. $|x+y|+|x-y|=2,\ kx-y+2k-2=0$을 동시에 만족하는 실수 $x,\ y$가 존재할 때, 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면, $M+m$의 값은?

① 3　　② $\dfrac{10}{3}$　　③ $\dfrac{11}{3}$　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|x+y|+|x-y|=2$ 을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다. 한편, $kx-y+2k-2=0$ 은 k 에 관하여 정리하면

$k(x+2)-(y+2)=0$ 이므로 k 의 값에 관계없이 항상 $(-2,-2)$ 를 지나는 직선이다.



두 도형을 동시에 만족하는 실수 $x,\ y$ 가 존재해야 하므로 두 그래프가 만나야 한다.

따라서 k 는 이 직선의 기울기 이므로

직선이 점$(-1,1)$ 을 지날 때, k 는 최대이고

점 $(1,-1)$ 을 지날 때 k 는 최소이다.

$M=3,\ m=\dfrac{1}{3}$

$\therefore M+m=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

30. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y+2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x-y+2+k(x+y)=0$ 을 정리하면
$(1+k)x+(k-1)y+2=0$
원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k)=\frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2+(k-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2+2}$ 가 최소일 때,
즉 $k=0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의
최대값은 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$