**1.** $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 $x$ 의 값을 구하면?

① $-3$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $2$ ⑤ $3$

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

**2.** 실수 $x$, $y$에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② $11$ ③ $7$ ④ $-7$ ⑤ $-11$

해설

$2x+y=3$, $x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

**3.** 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$ , $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 $a,\ b$ 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$ , $z_2 = (b-2)-ai$ 를
$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면
$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$
$3+(a-6)i = (b-2)-ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3 = b-2$ , $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b = 5,\ a = 3$
$\therefore\ a+b = 8$

**4.** $i+i^3+i^5+i^7+\cdots+i^{101}=a+bi$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a$, $b$ 는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(좌변)$=i-i+i-i+\cdots+i=i$ 이므로
$i=a+bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0,\ b=1$
$\therefore\ a+b=1$

**5.** $z = \frac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$z = \frac{2}{1-i} = 1 + i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= \ -5 \end{aligned}$$

해설

$z = 1 + i, z - 1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

**6.** 임의의 두 복소수 $a,\ b$ 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$

④ $-1$　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (\mathrm{Z} + \overline{Z})$, $Z = 2+i$, $\overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

**7.** 두 복소수 $z_1 = a + (3b-1)i$ , $z_2 = (b+1) - 5i$ 에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$ 가 성립할 때, 실수 $a, b$ 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a + (3b-1)i = (b+1) + 5i$ 에서

$\begin{cases} a = b+1 \\ 3b-1 = 5 \end{cases}$ 이므로 연립하면

$a = 3,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 5$

**8.** 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$　② $\pm(2-3i)$　③ $\pm(3-2i)$
④ $\pm(3+3i)$　⑤ $\pm(3+3i)$

**해설**

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면
$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$ 에서
$a^2-b^2+2abi = 5-12i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=5$ , $2ab=-12$ 에서
$ab=-6$ , $b=-\frac{6}{a}$ 이므로
$a^2-\left(-\frac{6}{a}\right)^2=5$ , $a^2-\frac{36}{a^2}=5$
양변에 $a^2$ 을 곱하면
$a^4-5a^2-36=0$, $(a^2-9)(a^2+4)=0$
따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로
$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$
그런데 $a$ 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.
따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

**9.** $x=-2-i$ 일 때, $x^2+4x+10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x=-2-i$ 에서 $x+2=-i$ 의 양변을 제곱하면
$(x+2)^2=(-i)^2$ 이므로
$x^2+4x=-5$
$\therefore\ x^2+4x+10=-5+10=5$

**10.** 실수 $x$ 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$ )

① $2x-1$　　② $-2x+1$　　③ $3$

④ $-3$　　⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

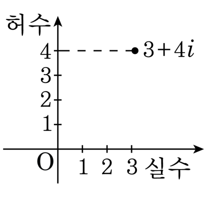
$a<0,\ \ b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2<0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

**11.** 복소수 $z = a + bi$ ($a$, $b$는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z = 1 + i$일 때, $0,\ z,\ z^2$ 이 나타내는 점을 각각 $A,\ B,\ C$ 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



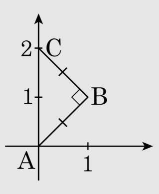

① 정삼각형　　② 이등변삼각형

③ 직각삼각형　　④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z = 1 + i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$




$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

**12.** $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 $x$들의 총합은?

① $-1$　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}\,i \\ &= \sqrt{x^2}\,\sqrt{(x^2-1)^2}\,i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|\,i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|\,i\end{aligned}$$

그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

**13.** 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

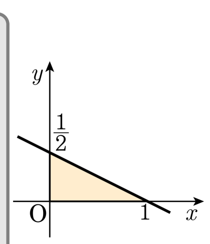
(준식) $= (2x-2y)+(x+2y-1)i = 0$

$\therefore x+2y-1=0,$

$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



**14.** 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$ 가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 $x$의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ )

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 $z$를 $a + bi$ ($a$, $b$는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$ , $x = \pm 1$
한편, $x = 1$이면 $z = 0 + 0i = 0$이므로
$z \neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x = -1$

**15.** 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 $x$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

**16.** $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 $a$의 값을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$ ?

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$

$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$

$-x^2-3ax+5=0\cdots$ⓐ

$x^2-3x+2=0\cdots$ⓑ

ⓑ을 인수분해하면,

$(x-1)(x-2)=0,\ \therefore\ x=1,\ 2$

ⓐ에 대입하면,

$x=1$일 때, $-1-3a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{4}{3}$

$x=2$일 때, $-4-6a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3},\beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

**17.** $(1+i)^6-(1-i)^6$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ )

① 16　② $-16$　③ $16i$　④ $-16i$　⑤ 0

해설

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i,$
$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$\therefore\ (1+i)^6-(1-i)^6$
$=\{(1+i)^2\}^3-\{(1-i)^2\}^3$
$=(2i)^3-(-2i)^3$
$=8i^3+8i^3$
$=16i^3=-16i$

**18.** $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 0　② $i$　③ $-2i$　④ $-1$　⑤ $-2$

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)+f(i)$

$=(-i)^{1998}+(i)^{1998}$

$=(-i)^{1996}\cdot(-i)^2+i^{1996}\cdot i^2=-2$

**19.** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$ 을 간단히 하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -2 ⑤ -4

해설

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=i \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=-i$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200} &= i^{100}+(-i)^{100}\\ &= (i^4)^{25}+\left((-i)^4\right)^{25}\\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

**20.** 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$ 이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2+\frac{1}{i}^3+\frac{1}{i}^4$

$=\frac{1}{i}^5+\frac{1}{i}^6+\frac{1}{i}^7+\frac{1}{i}^8\cdots$

$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2+\frac{1}{i}^3+\frac{1}{i}^4$

$=-i-1+i+1=0$

$\therefore$ (준식) $=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2$

$=1-i-1=-i$

**21.** $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}=x+yi$일 때, $x+y$의 값은? (단, $x, y$는 실수 $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}$
$=1+i-1-i+\cdots+i$
$=1+i$
$x=1,\ y=1,\ x+y=2$

**22.** $n$ 이 자연수일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+2} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ 의 값은?

① $-2$　　② $-2i$　　③ $0$　　④ $2$　　⑤ $2i$

해설

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$ 이므로

(주어진 식) $= (-i)^{4n+2} + i^{4n}$

$= \left\{(-i)^4\right\}^n \cdot (-i)^2 + (i^4)^n$

$1 \cdot (-1) + 1 = 0$

**23.** $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1+w+w^2+\cdots+w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ $0$

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$w^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^3=w\cdot w^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-3i^2}{4}=1$

$1+w+w^2=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=0$ 이므로

$\therefore 1+w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{100}$

$=1+w+w^2+w^3(1+w+w^2)+\cdots$

$+w^{96}(1+w+w^2)+w^{99}(1+w)$

$=0+0+\cdots+0+w^{99}(1+w)=(w^3)^{33}\cdot(1+w)$

$=1+w=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

**24.** $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 $x$ 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ $-1$

해설

$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$

$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

**25.** $x$에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 $a$의 값을 구하면?

① 1　　② $-1$　　③ 2　　④ $-2$　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 $x$ 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$ , $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3\quad\therefore\ a=1$

**26.** $\alpha = a + bi$ ($a$, $b$는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$  ② $1-i$  ③ $2+i$
④ $2-i$  ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

**27.** 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 $z$는?(단, $i = \sqrt{-1}$ )

① $1+i$　② $1-i$　③ $-1+i$

④ $-1-i$　⑤ $i$

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

**28.** 복소수 $z = a + bi,\ w = b + ai$ ($a,\ b$는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$ )에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $\overline{z},\ \overline{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\overline{z} = w$

② $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{z}{w}$

③ $z \cdot \overline{w} = \overline{z} \cdot w$

④ $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ $i(\overline{z} + \overline{w}) = z + w$

해설

① : $i\overline{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② :①에서 $\overline{z} = -iw$ $\cdots\cdots$ ㉠

같은 방법으로 $\overline{w} = -iz$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{-iz}{-iw} = \dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$ ,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

$\therefore$ 좌변$\neq$우변

④ : ②에서 $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ : $i(\overline{z} + \overline{w}) = i\overline{z} + i\overline{w} = w + z = z + w$

**29.** $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 $z$라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

**해설**

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 $z,\ \overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

**30.** $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 $z$ 의 켤레복소수)

| |
|---|
| ㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$ |
| ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$ |
| ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$ |

① ㉠　　② ㉠ , ㉡　　③ ㉠ , ㉢
④ ㉡ , ㉢　　⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ , $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$ , $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$ )

㉢ :$\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ , $\alpha+\overline{\alpha}=-1, \alpha\overline{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ , $\bar{z}=\dfrac{\overline{\alpha}+3}{2\overline{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3-5i}}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3+5i}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

**31.** $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$의 값은? (단, $n$은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i-2$　② $2i+2$　③ $2i-4$

④ $2i+4$　⑤ $4i-2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\ &= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}) \\ &\quad + (-1+2-3+\cdots+10) \\ &= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\ &= i+4 \\ f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i+4) + (-i-11) = -7 \\ f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1+12) = 6 \\ f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i-13) = i-7 \end{aligned}$$

$$\therefore f(10)+f(11)+f(12)+f(13) = (i+4)+(-7)+6+(i-7) = 2i-4$$

**32.** 복소수 $\alpha$의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ )

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수, $a > 0$ )라 두면

$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$

$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$

$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots$㉠, $3a^2b - b^3 = 1 \cdots$㉡

㉠에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 ㉡에 대입하면

$b = \frac{1}{2},\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ \alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+i}\\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2}\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

해설

$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \frac{1}{i} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left\{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\right\} = 0$

$\alpha + \frac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$

($\because$ 복소수 $\alpha$ 의 실수부가 양이므로)

$\therefore\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$

**33.** 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$가 $16 + x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_9 = 0$을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \cdots \times \sqrt{x_9}$의 값들의 곱을 구하면?

① 8　　② 16　　③ 24　　④ 36　　⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \ \cdots\ x_9 = -16$ 이므로
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m\ \ (y_i > 0)$ 이라 하고 양수인 것들은
$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n\ (z_i > 0)$ 이라 하자.
그러면 $y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n = 16$ ($m + n = 9$, $m$ : 홀수)
i) $m = 4k + 1$ ($k = 0,\ 1,\ 2$) 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i\end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3$ ($k = 0,\ 1$) 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i\end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$