1. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

2. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ \ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

3. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$

$3+(a-6)i = (b-2)-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=5,\ a=3$

$\therefore\ a+b=8$

4. $i+i^3+i^5+i^7+\cdots+i^{101}=a+bi$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(좌변)$=i-i+i-i+\cdots+i=i$ 이므로

$i=a+bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0$, $b=1$

$\therefore\ a+b=1$

5. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$$z = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= \ -5 \end{aligned}$$

해설

$z = 1 + i, z - 1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

6. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$

④ -1　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2+i$, $\overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

7. 두 복소수 $z_1 = a + (3b-1)i$, $z_2 = (b+1) - 5i$에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$가 성립할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a + (3b-1)i = (b+1) + 5i$에서

$\begin{cases} a = b+1 \\ 3b-1 = 5 \end{cases}$ 이므로 연립하면

$a = 3,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 5$

8. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$ ② $\pm(2-3i)$ ③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$ ⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ 에서

$a^2-b^2+2abi=5-12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서

$ab=-6$, $b=-\dfrac{6}{a}$ 이므로

$a^2-\left(-\dfrac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\dfrac{36}{a^2}=5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4-5a^2-36=0,\ (a^2-9)(a^2+4)=0$

따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로

$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

9. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면

$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로

$x^2 + 4x = -5$

$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

10. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

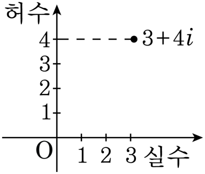
$a<0, \quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2<0,\ -1 \leq x<2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore \ -1<x<2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

11. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



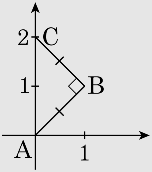
① 정삼각형　② 이등변삼각형

③ 직각삼각형　④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z = 1+i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

12. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}\,i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}\,i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|\,i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|\,i\end{aligned}$$

그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

13. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　　② 1　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

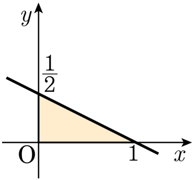
$(\text{준식}) = (2x-2y)+(x+2y-1)i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



14. 복소수 $z=(1+i)x^2+x-(2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 정리하면
$z=(x^2+x-2)+(x^2-1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2-1=0$, $x=\pm 1$
한편, $x=1$이면 $z=0+0i=0$이므로
$z\neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x=-1$

15. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0,$
$x=1$

16. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$

$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$

$-x^2-3ax+5=0\cdots$ ⓐ

$x^2-3x+2=0\cdots$ ⓑ

ⓑ을 인수분해하면,

$(x-1)(x-2)=0$, $\therefore\ x=1,\ 2$

ⓐ에 대입하면,

$x=1$일 때, $-1-3a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{4}{3}$

$x=2$일 때, $-4-6a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3}, \beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

17. $(1+i)^6-(1-i)^6$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 16　② -16　③ $16i$　④ $-16i$　⑤ 0

해설

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i,$
$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$\therefore\ (1+i)^6-(1-i)^6$
$=\{(1+i)^2\}^3-\{(1-i)^2\}^3$
$=(2i)^3-(-2i)^3$
$=8i^3+8i^3$
$=16i^3=-16i$

18. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 0 ② i ③ $-2i$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$=f(-i)+f(i)$$

$$=(-i)^{1998}+(i)^{1998}$$

$$=(-i)^{1996}\cdot(-i)^2+i^{1996}\cdot i^2=-2$$

19. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$ 을 간단히 하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ -2　　⑤ -4

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=i \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=-i$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200} &= i^{100}+(-i)^{100}\\ &= (i^4)^{25}+\left((-i)^4\right)^{25}\\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

20. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$ 이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=\frac{1}{i}^{5}+\frac{1}{i}^{6}+\frac{1}{i}^{7}+\frac{1}{i}^{8}\cdots$$

$$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=-i-1+i+1=0$$

$$\therefore\ (\text{준식})=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}$$

$$=1-i-1=-i$$

21. $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}=x+yi$ 일 때, $x+y$ 의 값은? (단, x,y 는 실수 $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}$

$=1+i-1-i+\cdots+i$

$=1+i$

$x=1,\ y=1,\ x+y=2$

22. n 이 자연수일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{4n+2}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ 의 값은?

① -2 ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$ 이므로

(주어진 식) $=(-i)^{4n+2}+i^{4n}$

$=\left\{(-i)^4\right\}^n\cdot(-i)^2+(i^4)^n$

$1\cdot(-1)+1=0$

23. $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \cdots + w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-3i^2}{4} = 1$$

$1 + w + w^2 = 1 + \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$\therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \cdots + w^{100}$

$= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \cdots$

$+ w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w)$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w)$

$= 1 + w = 1 + \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

24. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} i(x+i)^3 &= i(x^3+3x^2i-3x-i) \\ &= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i \end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

25. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3\quad\therefore\ a=1$

26. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$

④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a + bi,\ \alpha^t = b + ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}\qquad \therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

27. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

28. 복소수 $z=a+bi,\ w=b+ai$ ($a,\ b$는 $ab\neq 0$ 인 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\bar{z},\ \bar{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z}=w$

② $\dfrac{\bar{w}}{\bar{z}}=\dfrac{z}{w}$

③ $z\cdot\bar{w}=\bar{z}\cdot w$

④ $z\cdot\bar{z}=w\cdot\bar{w}$

⑤ $i(\bar{z}+\bar{w})=z+w$

해설

① : $i\bar{z}=i(a-bi)=b+ai=w$

② :①에서 $\bar{z}=-iw$ ⋯⋯ ㉠

같은 방법으로 $\bar{w}=-iz$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\bar{w}}{\bar{z}}=\dfrac{-iz}{-iw}=\dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $=z\cdot(-iz)=-iz^2$,

(우변) $=(-iw)\cdot w=-iw^2$

∴ 좌변≠우변

④ : ②에서 $z\cdot\bar{z}=w\cdot\bar{w}$

⑤ : $i(\bar{z}+\bar{w})=i\bar{z}+i\bar{w}=w+z=z+w$

29. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 z, $\overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

30. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$ ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$ ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠　　② ㉠ , ㉡　　③ ㉠ , ㉢

④ ㉡ , ㉢　　⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ :$\bar{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\bar{\alpha}=-1, \alpha\bar{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\bar{\alpha}+3}{2\bar{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\bar{\alpha}+3(\alpha+\bar{\alpha})+9}{4\alpha\bar{\alpha}+2(\alpha+\bar{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

31. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$이다.)

① $2i-2$　② $2i+2$　③ $2i-4$

④ $2i+4$　⑤ $4i-2$

해설

$$
\begin{aligned}
f(10) &= (i-1)+(i^2+2)+(i^3-3)+\cdots+(i^{10}+10) \\
&= (i+i^2+i^3+\ldots+i^{10}) \\
&\quad +(-1+2-3+\cdots+10) \\
&= (i-1)+(1+1+1+1+1) \\
&= i+4 \\
f(11) &= f(10)+i^{11}-11 \\
&= (i+4)+(-i-11) = -7 \\
f(12) &= f(11)+i^{12}+12 \\
&= -7+(1+12) = 6 \\
f(13) &= f(12)+i^{13}-13 \\
&= 6+(i-13) = i-7
\end{aligned}
$$

$\therefore f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$

$= (i+4)+(-7)+6+(i-7) = 2i-4$

32. 복소수 α 의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수, $a > 0$)라 두면

$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$

$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$

$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots$ ㉠, $3a^2b - b^3 = 1 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 ㉡에 대입하면

$b = \dfrac{1}{2},\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

해설

$\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \frac{1}{i} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left\{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\right\} = 0$$

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \dfrac{1}{\alpha} > 0$

($\because$ 복소수 α 의 실수부가 양이므로)

$\therefore\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$

33. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$가 $16 + x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_9 = 0$을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \cdots \times \sqrt{x_9}$의 값들의 곱을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \ \cdots\ x_9 = -16$ 이므로

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.

이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m\ \ (y_i > 0)$ 이라 하고 양수인 것들은

$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n\ (z_i > 0)$ 이라 하자.

그러면 $y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n = 16$ ($m + n = 9$, m :홀수)

i) $m = 4k + 1\ (k = 0,\ 1,\ 2)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i\end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3\ (k = 0,\ 1)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i\end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii)에서 $4i \times (-4i) = 16$