1. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$
② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$
④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$$
$$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$$
$$=(a-b)(a+b)(b-c)$$

2. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$
② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$
④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$
⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

3. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$ ② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2-b^2-c^2+2bc$ ④ $a^2+b^2-c^2-2bc$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$

$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-b^2-c^2+2bc$

4. $\left(x^4-8x^2-9\right) \div \left(x^2-9\right)$를 계산하여라.

① x^2+1　　② x^2-1　　③ x^2+2

④ x^2-2　　⑤ x^2+3

해설

$x^4-8x^2-9=\left(x^2-9\right)\left(x^2+1\right)$

$\therefore$ (준식)$=x^2+1$

5. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

6. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로

(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

7. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해 될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

8. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

9. 두 다항식 $2x^2+2x-4$와 $4x^3-4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2+2x-4=2(x-1)(x+2)$
$4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

10. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$

따라서 최대공약수는 $x+1$

11. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2 - 20a + 25)$

④ $(x^2-x)(x^2-x+1) - 6 = (x^2-x+3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$$\begin{aligned} &64a^3 - 125 \\ &= (4a)^3 - (5)^3 \\ &= (4a-5)\left(16a^2 + 20a + 25\right) \end{aligned}$$

12. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

13. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $-(a+b+c)(a-b-c)$

③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$ ④ $(a+b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

14. $(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + \cdots + (9^2 - 10^2)$을 구하면?

① 55　② -55　③ 45　④ -45　⑤ 0

해설

$(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + \cdots + (9^2 - 10^2)$

$= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + (5-6)(5+6) +$

$\cdots \quad + (9-10)(9+10)$

$= -(1+2+3+4+\cdots+9+10)$

$= -55$

15. $\dfrac{11^6 - 1}{11^2(11^2+1)+1}$ 의 값을 구하면?

① 119　② 120　③ 121　④ 122　⑤ 123

해설

$$\frac{(11^2)^3 - 1}{(11^2)^2 + (11^2) + 1}$$
$$= \frac{(11^2 - 1)\{(11^2)^2 + (11^2) + 1\}}{(11^2)^2 + (11^2) + 1}$$
$$= 11^2 - 1 = (11+1)(11-1) = 120$$

16. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times 2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$$a=\frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$$

$=2013$ 이므로

$$\therefore\ \frac{a+1}{a-1}=\frac{2013+1}{2013-1}=\frac{2014}{2012}=\frac{1007}{1006}$$

17. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

18. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2,
$(x-1)(3x^2+ax+2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2+ax+2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x)=3x^2+ax+2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$
$\therefore a=-3$

19. 세 다항식 x^2+ax-4, ax^2-bx-2, $2x^2-ax+b$ 의 최대 공약수가 $x-1$ 일 때, 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)(x+4)(3x+2)$

② $(x-1)(x+4)(2x-1)$

③ $(x+4)(2x-1)$

④ $(x-1)(x+4)(3x+2)(2x-1)$

⑤ $(x-1)(x-4)(3x+2)(2x+1)$

해설

나머지 정리를 이용하면 $f(1)=0$

$1+a-4=0,\quad a-b-2=0,\quad 2-a+b=0$

연립하여 풀면, $a=3,\quad b=1$

$\therefore\quad x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

$3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$

$2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$

따라서 최소공배수$=(x-1)(x+4)(3x+2)(2x-1)$

20. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$\quad B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

21. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 이차식의 합을 구하면?

① $2x^2-1$ ② $2x^2-2$ ③ $2x^2-3$

④ $2x^2+1$ ⑤ $2x^2+2$

해설

두 다항식은 $(x-1)a, (x-1)b$ (a, b는 서로소)

$x^3+x^2-2x=(x-1)ab=x(x+2)(x-1)$

두 다항식은 $x(x-1), (x+2)(x-1)$

$\therefore$ 두식의 합은 $2x^2-2$

22. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 $x^3-6x^2+3x+10$일 때, 두 다항식의 합을 구하면? (단, 이차항의 계수는 모두 1이다.)

① $2x^2-6x+8$ ② $2x^2-6x+7$ ③ $2x^2-8x+8$

④ $2x^2-9x+10$ ⑤ $2x^2+6x+9$

해설

구하는 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이므로
두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수 $(x-2)ab = x^3-6x^2+3x+10$
$= (x-2)(x+1)(x-5)$
그러므로 $a = x-5, b = x+1$
또는 $a = x+1, b = x-5$
따라서 두 다항식은
$(x-2)(x-5) = x^2-7x+10$,
$(x-2)(x+1) = x^2-x-2$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-8x+8$

23. 합이 $2x^3+x^2-5x+2$ 이고, 최소공배수가 x^4-3x^2+2x 인 두 식을 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(2)\times g(2)$ 의 값을 구하면?

① 12 ② 22 ③ 26 ④ 32 ⑤ 36

해설

$f(x)=Ga,\ g(x)=Gb$ (단, a, b : 서로소)

$f(x)+g(x)=G(a+b)$

$=(x-1)(x+2)(2x-1)\cdots$ ㉠

$L=Gab=x(x-1)^2(x+2)\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b$와 ab가 서로소이므로

$G=(x-1)(x+2)$

$\therefore f(x)g(x)=LG=x(x-1)^2(x+2)(x-1)(x+2)=x(x-1)^3(x+2)^2$

$\therefore\ f(2)g(2)=32$

24. 1999개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3$, $2\cdot 4$, $3\cdot 5$, $\cdots$, $43\cdot 45(=1935)$의 43개

25. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$$
$$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$$
$$=(x-y)(x+y+1)^2$$
$$p=-1, q=1, r=1$$
$$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$$

26. $a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)$를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a+b-c-d)(a-b+c+d)$

② $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

③ $(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

④ $(a-b+c-d)(a-b+c+d)$

⑤ $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

해설

$$
\begin{aligned}
&a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)\\
&=(a^2+2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)\\
&=(a+c)^2-(b-d)^2\\
&=(a+b+c-d)(a-b+c+d)
\end{aligned}
$$

27. 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2=(a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ $a=c$인 이등변 삼각형
④ c가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면
$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$에서
$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$
$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$
$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$
a ,b ,c 는 삼각형의 세변이므로
$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$
즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

28. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

29. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

30. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$

$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에

$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$

$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로

$x-1$을 인수로 가져야 한다.

$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0,\ a=-1$

31. $a+b+c=0,\ abc\neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\therefore(\text{준식})=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$$

32. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1$, $Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠

$P + Q = x\left\{2x^2 + (a + b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡

P, Q 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, P, Q 에는

x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는

$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.

$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0$

$\therefore\ 2a + b = -4$

33. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $B(x)$와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$일 때, $R(2)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$A = BQ + R$에서 A, B 의 $G.C.M.$과 B, R의 $G.C.M.$은 일치한다.
($\Leftarrow$ *Euclid* 호제법)
그러므로 $x-1$은 $A(x)$, $B(x)$의 공약수이다.
$\therefore\ A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,
$B(1) = 0$에서 $q = -4$
$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x-1)$
양변에 $x = 3$을 대입하면 $-8 = 2a\ \ \therefore\ a = -4$
$\therefore\ R(x) = -4(x-1)\quad \therefore\ R(2) = -4$