

1. 어떤 수 A 를 8 로 나누었더니 몫이 9 이고, 나머지가 3 이었다. 어떤 수 A 는?

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

해설

$$A = 8 \times 9 + 3 = 75$$

2. 24를 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때 어떤 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

어떤 수를 나누어 떨어지게 하는 수를 그 어떤 수의 약수라 한다.
24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $3^3 = 27$

② $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

③ $3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$

④ $\frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

⑤ $\frac{1}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5} = \frac{1}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{540}$

해설

⑤ $\frac{1}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5} = \frac{1}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{450}$

4. 20이하의 홀수 중에서 두 자리 소수를 모두 고른 것은?

- ① 11, 13, 17 ② 11, 13, 15, 17 ③ 11, 13, 15, 19
④ 11, 15, 17, 19 ⑤ 11, 13, 17, 19

해설

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19의 수 중에서
두 자리 소수는 11, 13, 17, 19 이다.

5. 120 을 소인수분해한 것 중 알맞은 것은?

- ① $2^3 \times 3 \times 5$ ② $4^2 \times 3 \times 5$ ③ $2 \times 6 \times 10$
④ $2^2 \times 6 \times 5$ ⑤ $2^2 \times 3 \times 10$

해설

$2 \overline{) 120}$
 $2 \overline{) 60}$
 $2 \overline{) 30}$
 $3 \overline{) 15}$
5
 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

6. $240 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값은?

① 45 ② 60 ③ 75 ④ 90 ⑤ 105

해설

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ 이므로 $a = 3 \times 5$

$2^4 \times 3 \times 5 \times (3 \times 5) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$, $b = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

$a = 15$, $b = 60$

$\therefore b - a = 45$

7. $2^a \times 3^b$ 이 $2^2 \times 3$ 을 약수로 가질 때, 두 자연수 a, b 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

$2^a \times 3^b$ 이 $2^2 \times 3$ 을 약수로 가지므로, a 는 2 이상의 자연수, b 는 1 이상의 자연수가 되어야 한다.
그 중 최솟값은 $a = 2, b = 1$ 일 때이다.

8. $2^2 \times \square \times 7$ 은 어떤 수를 소인수분해한 식이고 이 수는 약수의 개수가 12 개인 가장 작은 수이다. $\square$ 안에 알맞은 수는?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 11

해설

$$2^2 \times a^n \times 7$$

$$(2+1) \times (n+1) \times (1+1) = 12 \quad \therefore n = 1$$

2를 제외한 가장 작은 소수는 3이므로

$$3^1 = 3$$

9. 300 에 가장 가까운 11 의 배수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 297

해설

$11 \times 27 = 297$, $11 \times 28 = 308$ 이므로 300 에 가장 가까운 배수는 297 이다.

10. 다음 중 3의 배수가 아닌 것은?

- ① 129 ② 672 ③ 501 ④ 342 ⑤ 781

해설

3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

⑤ $7 + 8 + 1 = 16$ 은 3의 배수가 아니므로 781은 3의 배수가 아니다.

11. $x = 5^{15} + 1$, $y = 2^{13} + 1$ 일 때 xy 는 몇 자리의 수인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$xy = 5^{15} \times 2^{13} + 5^{15} + 2^{13} + 1$$

이 때 $5^{15} \times 2^{13} > 5^{15} + 2^{13} + 1$ 이므로

$5^{15} + 2^{13} + 1$ 은 자릿수를 고려할 때 생각하지 않는다.

$$5^{15} \times 2^{13} = 5^{13} \times 2^{13} \times 5^2$$

$$= (5 \times 2)^{13} \times 25$$

$$= 10^{13} \times 25$$

따라서 xy 는 15 자리의 수이다.

12. 3^{90} 의 일의 자리의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

3 의 거듭제곱 수마다 일의 자리 수를 구해보면 3, 9, 7, 1 이 반복되는 것을 알 수 있다.

3의 거듭제곱 수	일의 자리 수
$3^1(=3)$	3
$3^2(=3 \times 3=9)$	9
$3^3(=3 \times 3 \times 3=27)$	7
$3^4(=3 \times 3 \times 3 \times 3=81)$	1
$3^5(=3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3=243)$	3
$3^6(=3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3=729)$	9
$\vdots$	$\vdots$

90 은 4 로 나누었을 때 나머지가 2 이므로 3^{90} 의 일의 자리의 수는 9 이다.

13. x 는 $3^7 \times 5^4$ 의 약수 중에서 a^2 의 형태로 나타낼 수 있는 수일 때, x 값의 개수를 구하여라. (단, a 는 자연수)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

$3^7 \times 5^4$ 의 약수 중 (자연수)²이 되는 수는
1, 3^2 , $(3^2)^2$, $(3^3)^2$, 5^2 , $(5^2)^2$, $(3 \times 5)^2$,
 $(3 \times 5^2)^2$, $(3^2 \times 5)^2$, $(3^2 \times 5^2)^2$, $(3^3 \times 5)^2$,
 $(3^3 \times 5^2)^2$ 이다.
∴ 12개이다.

14. $2^2 \times 3 \times 7$ 의 약수가 아닌 것은?

① 2×3

② $2^2 \times 7$

③ 3^2

④ 3×7

⑤ $2 \times 3 \times 7$

해설

$(2^2 \times 3 \times 7$ 의 약수)는 $(2^2$ 의 약수) $\times$ (3의 약수) $\times$ (7의 약수)이다.

15. 다음 중 약수의 개수가 가장 많은 것은?

① 200

② 2×5^3

③ $3^2 \times 7^2$

④ 150

⑤ $3^2 \times 11^2 \times 13$

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

① $200 = 2^3 \times 5^2$ 이므로 $(3+1) \times (2+1) = 12$ (개) 이다.

② $(1+1) \times (3+1) = 8$ (개)

③ $(2+1) \times (2+1) = 9$ (개)

④ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $(1+1) \times (1+1) \times (2+1) = 12$ (개) 이다.

⑤ $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$ (개)

16. 다음은 희망이의 수학일기 중 일부이다. 밑줄 친 부분 중 틀린 부분을 기호로 써라.

오늘은 수학시간에 수의 약수의 개수를 구할 때, 직접 그 수의 약수를 모두 구하지 않고도 소인수분해만을 이용하여 약수의 개수를 구하는 방법을 배웠다. 소인수분해만 구하면 약수의 개수를 구할 수 있다니! 정말 신기하다!! 그럼 오늘 배운 내용을 복습해 볼까.
문제) 98 의 약수의 개수 구하기
풀이) ㉠먼저 98 을 소인수분해하면 $98 = 2 \times 7^2$ 이다.
㉡ 약수의 개수를 구할 때는, 각 지수에 1을 더하여 곱한다.
㉢ 따라서 98 의 약수의 개수는 $(0 + 1) \times (2 + 1) = 3$ (개) 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ 98 을 소인수분해하면 $98 = 2 \times 7^2$ 이다. 한편 2와 7^2 의 지수는 각각 1,2 이므로 98 의 약수의 개수는 $(1 + 1) \times (2 + 1) = 6$ (개) 이다.

17. 다음 수를 약수의 개수가 적은 것부터 순서대로 나열한 것은?

보기

㉠ $2^5 \times 3$

㉡ $2^4 \times 5^2$

㉢ $2 \times 3 \times 7$

㉣ $2 \times 3 \times 5 \times 11$

㉤ $3^2 \times 5^3 \times 7$

① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

② ㉡, ㉢, ㉠, ㉤, ㉣

③ ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤

④ ㉢, ㉡, ㉤, ㉣, ㉠

⑤ ㉣, ㉠, ㉤, ㉡, ㉢

해설

㉠ 12 개 ㉡ 15 개 ㉢ 8 개 ㉣ 16 개 ㉤ 24 개
따라서 ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤ 순서이다.

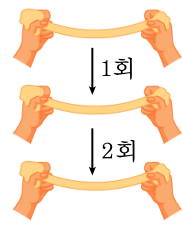
18. 손으로 국수를 만들 때, 반죽을 늘어 1 회 접으면 두 가닥이 되고, 2 회 접으면 네 가닥이 된다. 국수가 100 가닥 이상 필요 할 때, 최소 몇 회를 접어야 하는가?
- ① 4 회

② 5 회

③ 6 회

④ 7 회

⑤ 8 회



해설

반죽을 1 회 접으면 2 가닥, 2 회 접으면 (2×2) 가닥, 3 회 접으면 (2×2×2) 가닥이 된다. 접는 횟수에 따른 국수의 가닥 수를 표로 정리하면 다음과 같다.

접는 횟수	국수의 가닥 수(가닥)	국수의 가닥수를 거듭제곱으로 표현
1회	2	2 ¹
2회	2×2=4	2 ²
3회	2×2×2=8	2 ³
4회	2×2×2×2=16	2 ⁴
5회	2×2×2×2×2=32	2 ⁵
⋮	⋮	⋮

2⁵ = 32, 2⁶ = 64, 2⁷ = 128, ... 이므로 국수 100 가닥을 만들려면 7 회 이상 접어야 한다.

19. 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ① 소수의 약수는 1 과 자기 자신 2 개이다.
- ② 가장 작은 소수는 2 이다.
- ③ 모든 소수는 홀수이다.
- ④ 두 소수의 곱은 소수이다.
- ⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

해설

- ㉠ 모든 소수는 홀수이다 → 소수 중 2 는 짝수이다.
- ㉡ 두 소수의 곱은 소수이다 → 두 소수의 곱은 $2 \times 3 = 6$, $3 \times 5 = 15$ 등으로 합성수이다.

20. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을 a , 소인수의 지수의 합을 b 라 하자. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \\ &a = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41 \\ &b = 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 \\ &\therefore a - b = 41 - 20 = 21 \end{aligned}$$

21. 자연수 x 를 소인수분해하여 곱해진 모든 수들의 합을 $S(x)$ 라 한다.
(단, 1 은 생각하지 않는다.)
예를 들면, $2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$ 이므로 $S(2250) = 2 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 = 23$
이 때, 어떤 자연수 m 을 소인수분해하면 세 종류의 소인수가 나타나고
 $S(m) = 17$ 이라고 한다. 이러한 수 중에서 가장 큰 수와 작은 수의
차를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

17 을 세 종류의 소수의 합으로 나타내면,
 $17 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5 = S(360)$
 $17 = 2 + 2 + 3 + 5 + 5 = S(300)$
 $17 = 2 + 2 + 3 + 3 + 7 = S(252)$
 $\therefore 360 - 252 = 108$

22. 두 자연수 x, y 에 대하여 $2^x \times 3 \times 5^y$ 의 약수의 개수가 36일 때, $x+y$ 의 값으로 알맞은 것을 모두 구하면?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$(x+1) \times (1+1) \times (y+1) = 36$
 $(x+1) \times (y+1) = 18$
 $18 = 2 \times 9$ 또는 $18 = 3 \times 6$ 이므로
 $x+1 = 2, y+1 = 9$ 또는 $x+1 = 9, y+1 = 2$ 일 때,
 $x = 1, y = 8$ 또는 $x = 8, y = 1$
그러므로 $x+y = 9$
 $x+1 = 3, y+1 = 6$ 또는 $x+1 = 6, y+1 = 3$ 일 때,
 $x = 2, y = 5$ 또는 $x = 5, y = 2$
그러므로 $x+y = 7$

23. 다음 수 중 어떤 자연수의 제곱이 되지 않는 수는?

- ① $2 \times 3 \times 3$ ② $2^2 \times 5^2$ ③ 16
④ $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ ⑤ 81

해설

① 지수가 모두 짝수가 아니므로 자연수의 제곱이 되지 않는 수이다.

24. $32 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, a 가 될 수 있는 수 중 20보다 작은 수의 개수를 구하면?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$32 = 2^5$ 이므로

a 가 될 수 있는 수는 $2 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.

따라서 a 가 될 수 있는 20보다 작은 수는 2, 2^3 , 2×3^2 , 즉 3개이다.

25. 자연수 n 에 대하여 n 부터 연속하는 5 개의 자연수의 곱을 $[n]$, n 의 약수의 개수를 $s(n)$ 로 정의한다. $\frac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 을 만족하는 10보다 작은 자연수 n 을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 7

해설

1 부터 13 까지 자연수를 소인수분해해보면
1, 2, 3, $4 = 2^2$, 5, $6 = 2 \times 3$, 7, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \times 5$, 11, $12 = 2^2 \times 3$, 13 이다.
즉, $[1] = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이고, $s([1]) = s(2^3 \times 3 \times 5)$
약수의 개수를 구하면 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 이다. 차례대로 값을 구하면
 $s([1]) = 16$, $s([2]) = 30$, $s([3]) = 56$, $s([4]) = 112$, $s([5]) = 144$,
 $s([6]) = 96$, $s([7]) = 120$, $s([8]) = 112$, $s([9]) = 128$, $s([10]) = 160$
따라서, $\frac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 인 경우는 $s([n+1]) < s([n])$ 이므로 n 의 값은 5, 7 이다.