1. $f(x)=x^3-ax^2+bx-2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -3

해설

$f(x)=x^3-ax^2+bx-2$ 라 놓으면,

$f(1)=1-a+b-2=0$

$\therefore\ -a+b=1\cdots$ ㉠

$f(-2)=-8-4a-2b-2=0$

$\therefore\ 2a+b=-5\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2,\ b=-1$

2. 실수 x에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

3. x에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이므로

$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$

$(k-3)^2 = 0$

$\therefore\ k = 3$

4. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

5. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$가 $x^2 - x + 1$로 나누어떨어질 때, $a - b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x^3 + ax^2 + x + b$

$= (x^2 - x + 1)(2x + c)$

$= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c$

$\therefore\ a = c - 2,\ 1 = 2 - c,\ b = c$

$c = 1$이므로 $a = -1, b = 1$

$\therefore\ a - b = -2$

6. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 16　　④ 32　　⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

7. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m+n$의 값은?

① $-\frac{19}{3}$ ② $-\frac{25}{6}$ ③ $-\frac{29}{6}$ ④ $-\frac{14}{3}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$f(x)=x^3+mx^2+nx+1$

$f(x)=(x+1)Q1(x)+5$ 으로 놓으면 $f(-1)=5$

$f(x)=(x-2)Q'(x)$ 으로 놓으면 $f(2)=0$

따라서, $f(-1)=-1+m-n+1=5$

$f(2)=8+4m+2n+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{1}{6},\quad n=-\frac{29}{6}$

$\therefore\ m+n=-\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}$

8. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 를$x-1, x-2, x-3$ 으로 나눈 나머지가 각각 $2, 4, 6$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 11 ⑤ 14

해설

$$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$$
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+ax^2+bx+c$$
$$a+b+c=2,\ 4a+2b+c=4,\ 9a+3b+c=6$$
$$a=0,\ b=2,\ c=0$$
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$$
$$f(4)=3\times2\times1+8=14$$

9. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 5이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x-1$

해설

$f(-1)=-3,\ f(3)=5$

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$-a+b=-3,\ 3a+b=5$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ ax+b=2x-1$

10. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x+1, x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 4, -18 이라고 한다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $x+4$ ② $x-4$ ③ $22x+26$

④ $22x-26$ ⑤ $x-18$

해설

$f(-1)=4,\ f(-2)=-18$

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$

$-a+b=4,\ \ -2a+b=-18$

$\therefore\ \ a=22,\ b=26$

11. 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b(a \neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때,
$xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지를 구하면?

① R ② aR ③ bR ④ $-\frac{b}{a}R$ ⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$f(x) = (ax+b)Q(x) + R \quad \therefore\ R = f(-\frac{b}{a})$

$g(x) = xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는

$g(-\frac{b}{a}) = -\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a}) = -\frac{b}{a}R$

12. $(x+1)^2+(x+1)(y+2)-6(y+2)^2$ 의 인수를 구하면?

① $x-2y+3$ ② $x-2y-3$ ③ $x+2y-3$

④ $x+3y-7$ ⑤ $x-3y+7$

해설

$x+1=a$, $y+2=b$ 라 하면

$(x+1)^2+(x+1)(y+2)-6(y+2)^2$

$=a^2+ab-6b^2$

$=(a-2b)(a+3b)$

$=\{(x+1)-2(y+2)\}\{(x+1)+3(y+2)\}$

$=(x+1-2y-4)(x+1+3y+6)$

$=(x-2y-3)(x+3y+7)$

13. $\dfrac{2010^3-1}{2010\times 2011+1}$ 의 값을 구하면?

① 2007　　② 2008　　③ 2009

④ 20010　　⑤ 2011

해설

$a=2010$ 로 놓으면,

$$(\text{준 식})=\frac{a^3-1}{a(a+1)+1}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=a-1$$

$$=2009$$

14. 이차항의 계수가 1인 두 이차식의 최대공약수가 $x-2$, 최소공배수가 x^3-7x+6일 때, 두 이차식의 합은?

① $2x^2-2x-4$ ② $2x^2-7x+4$ ③ $2x^2+3x+6$

④ $2x^2-5x-4$ ⑤ $2x^2+6x+4$

해설

두 이차식을 A, B라 하고

$A=(x-2)a, B=(x-2)b$라 하자.

$L=x^3-7x+6=(x-2)(x+3)(x-1)$이므로

$A=(x-2)(x+3), B=(x-2)(x-1)$로 볼 수 있다.

$\therefore A+B=2x^2-2x-4$

15. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

16. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z-\bar{z}=2i$, $\dfrac{\bar{z}}{z}=-i$ 가 성립할 때, $z\cdot\bar{z}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 13

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$z-\bar{z}=2i$ 에서 $a+bi-(a-bi)=2i$, $2bi=2i$

$\therefore\ b=1$

$\dfrac{\bar{z}}{z}=-i$ 에서 $\dfrac{a-i}{a+i}=-i$

$\dfrac{(a-i)^2}{a^2+1}=-i$, $\dfrac{a^2-1-2ai}{a^2+1}=-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(i) 실수부분이 0 이어야 하므로

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=0\ ,\ a^2-1=0$$

$\therefore a=\pm1 \qquad \cdots$ ㉠

(ii) 허수부분이 -1 이어야 하므로

$$\frac{-2a}{a^2+1}=-1\ ,\ a^2+1=2a$$

$$a^2-2a+1=0\ ,\ (a-1)^2=0$$

$\therefore a=1 \qquad \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a=1$

$\therefore\ z\cdot\bar{z}=(1+i)(1-i)=1+1=2$

17. z를 입력시키면 zi가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100}이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2i$ ④ 2 ⑤ 2^{100}

해설

$z \to zi \to zi^2 \to zi^3 \to \cdots \to zi^{100}$

$\therefore zi^{100} = 2^{100}$

$\therefore z = 2^{100}$

18. $f(x)=x^{2008}+x^{2010}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) &= f(-i)=(-i)^{2008}+(-i)^{2010} \\ &= ((-i)^4)^{502}+((-i)^4)^{502}\cdot(-i)^2 \\ &= 1+(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

19. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\dfrac{1-\alpha}{a\overline{a}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{i}{3}$ ② i ③ $-i$ ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\overline{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\overline{a}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

20. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3-2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3-2i}$

$(a-2i) + (5-bi) = 3 + 2i$

$(a+5) - (2+b)i = 3 + 2i$

$\therefore \ a = -2, b = -4$

$\therefore \ a + b = -6$

21. $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4 - \bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$ ② $-\sqrt{3}i$ ③ $2\sqrt{3}i$
④ $-2\sqrt{3}i$ ⑤ 1

해설

$$z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} = \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore\ 2z+1 = \sqrt{3}i \cdots$ ①

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$4z^2+4z+1 = -3 \Leftrightarrow z^2+z+1 = 0 \cdots$ ②

②의 양변에 $z-1$을 곱해주면

$(z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1$

$\therefore\ z^3 = 1$ 이므로 $z^4 = z$

$$\therefore z^4 - \bar{z} = z - \bar{z} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \sqrt{3}i$$

22. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

i) $x<-1$일 때,

$-x-1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)

ii) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=0$

iii) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

23. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9 ② -5 ③ 3 ④ 6 ⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.

$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$ $\quad \therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10$

$\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$　　② $m \geq 5$　　③ $m < 5$

④ $m \leq 5$　　⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$

즉 $m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로

$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$

또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$이어야 하므로 $m > 2$

또 두근의 곱 $2m - 1 > 0$이어야 하므로 $m > \frac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$

25. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

$$\therefore\ x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=-1-3\cdot(-1)=2$$

26. 어떤 일차식 $g(x)$에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2$가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\ &= \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}^2 \\ &= x^4 - 2(\alpha+\beta)x^3 \\ &+ \{(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + \alpha^2\beta^2 \\ &= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)\end{aligned}$$

$g(x)$가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-2(\alpha+\beta) = 2,\ (\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$

$\therefore\ \alpha+\beta = -1,\ \alpha\beta = -2$

27. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,

$t = 0 \rightarrow 1985$년, $t = 1 \rightarrow 1990$년, $t = 2 \rightarrow 1995$년

$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,

$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서

$t = 0 \rightarrow 1990$년임을 알 수 있다.

28. x에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$에서 $a_1 + a_3 + a_5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,

$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$ ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면,

$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡: $-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 = -1$

29. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x-\alpha$ 로 나누어떨어질 때,
$f(f(x))$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는?

① 0

② a_0

③ a_1

④ a_5

⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
$\therefore f(f(x))$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
$f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

30. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41　　② 31　　③ 21　　④ 11　　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\ &= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\ &= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4 \end{aligned}$$

$\therefore R(x) = 2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2) = 11$

31. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$로 인수분해될 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} x^4-11x^2+1 &= (x^2-1)^2-9x^2 \\ &= (x^2-1)^2-(3x)^2 \\ &= (x^2-3x-1)(x^2+3x-1) \\ &= (x^2+ax+b)(x^2+3x+b) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$

32. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

33. x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z가 빗변인 직각삼각형　② x가 빗변인 직각삼각형

③ $x = y$인 이등변삼각형　④ $y = z$인 이등변삼각형

⑤ $z = x$인 이등변삼각형

해설

$xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$

$(x - y)z^2 + (x^2 - y^2)z + (x - y)xy = 0$

$(x - y)\{z^2 + (x + y)z + xy\} = 0$

$(x - y)(z + x)(z + y) = 0 \therefore\ x = y$ ($\because x,\ y,\ z$는 모두 양수)

$\therefore\ x = y$인 이등변삼각형

34. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 a, b, c에 대하여 $x=a-2b+3c$,$y=b-2c+3a$, $z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

35. 두 다항식 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$, x^3+2x^2-x-2의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$f(x)=2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.
최대공약수가 이차식이므로 $f(x)$는 $x+1$
또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.
$f(-2)=-8-4a-8-4a\neq 0$이므로
$x+1$이 인수이다.
$\therefore\ f(-1)=0$일 때 $a=-2$

36. $f(2)=-15$, $g(-2)=5$ 인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 의 곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$, 최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 일 때, $f(-2)+g(2)$ 의 값은?

① 8　　② 18　　③ 28　　④ 38　　⑤ 48

해설

곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$ 이고,
최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 이므로
두 이차식은 $(x+3)(x-5)$, $(x+3)(x+7)$
$f(2)=-15$ 이므로 $f(x)=(x+3)(x-5)$
$g(-2)=5$ 이므로 $g(x)=(x+3)(x+7)$

$$\begin{aligned}\therefore f(-2)+g(2) &= (-2+3)(-2-5)+(2+3)(2+7)\\ &= (-7)+45=38\end{aligned}$$

37. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3\quad \therefore\ a=1$

38. 방정식 $\{1+(a+b)^2\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, $a,\ b$는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\{1+(a+b)^2\}\cdot 2\geq 0$$

$$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$$

양변에 -1을 곱하면

$$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$$

$$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$$

그런데 $a,\ b$가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab\\ &= -1\end{aligned}$$

39. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a이면

다른 한 근은 $\frac{1}{a}$이다.

$\therefore \quad a+\frac{1}{a}=k^2=\frac{2k+5}{3}$

$\therefore \quad 3k^2-2k-5=0$

$k=\frac{5}{3}$ 또는 -1

$\therefore$ 양수 $k=\frac{5}{3}$

40. $a-b=1$이고, $a^2+b^2=-1$일 때, $a^{14}+b^{20}$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=a-1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면

$a^2-a+1=0$에서 $a^3=-1$

$a=b+1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면

$b^2+b+1=0$에서 $b^3=1$

$$\begin{aligned} a^{14}+b^{20} &= (a^3)^4\times a^2+(b^3)^6\times b^2 \\ &= a^2+b^2=-1 \end{aligned}$$

41. $a+b+c=0,\ abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\therefore(\text{준식})=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$$

42. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.
② 정수가 아닌 유리수이다.
③ 정수이다.
④ 홀수인 자연수이다.
⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a(\text{정수})$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -b$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= a^2(\text{정수}) \end{aligned}$$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b(\text{정수})$

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.