1. 두 집합 $X = \{-2,\ -1,\ 0\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

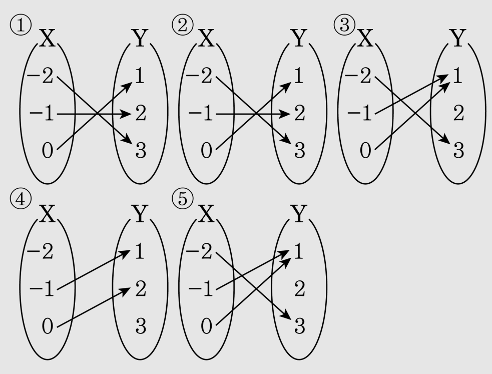
① $f(x) = 1 - x$　　② $f(x) = |x| + 1$

③ $f(x) = x^2 + x + 1$　　④ $f(x) = x^3 + 2$

⑤ $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④ 이다.

2. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f가 $f\ : Q^+ \ \rightarrow\ N \times N$으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, $p,\ q$는 서로소)

① $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p,\ 0)$　　② $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (0,\ q)$

③ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p+q,\ 0)$　　④ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (0,\ pq)$

⑤ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p,\ q)$

해설

①$\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{2}{5}$ 일 때

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = f\left(\dfrac{2}{5}\right) = (2.\ 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로
일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

3. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

4. 두 함수 f, g를 $f(x)=x-1$, $g(x)=2x+4$로 정의할 때, $(f\cdot(g\cdot f)^{-1}\cdot f)(3)$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f\cdot(g\cdot f)^{-1}\cdot f$

$=f\cdot(f^{-1}\cdot g^{-1})\cdot f$

$=g^{-1}\cdot f$

$\therefore\ (f\cdot(g\cdot f)^{-1}\cdot f)(3)$

$=(g^{-1}\cdot f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(2)$

이 때, $g^{-1}(2)=a$라 하면

$g(a)=2$에서 $2a+4=2$

$\therefore\ a=-1$

5. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$

무리수의 상등에 의하여

유리수 부분 : $(a^2+2) = 6,\ a^2 = 4$

무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2},\ 2a = b$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4,\ ab = 8 \\ a = -2, b = -4,\ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore ab = 8$

6. $y = \sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

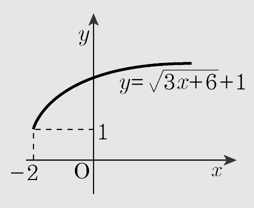
$y=2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha=3$, $\beta=5$
$\therefore\ \alpha+\beta=8$

7. 함수 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프가 지나는 모든 사분면은?

① 제 1 , 2 사분면
② 제 1 , 3 사분면
③ 제 1 , 4 사분면
④ 제 1 , 2 , 3 사분면
⑤ 제 1 , 3 , 4 사분면

해설

$y = \sqrt{3x+6}+1 = \sqrt{3(x+2)}+1$
주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프는 제 1 , 2 사분면을 지난다.

8. $f : (x, y) \to (x-2, y+1)$, $g : (x, y) \to (-x, -y)$일 때, 곡선 $y = \sqrt{-x+2}+1$ 이 $g \circ f$에 의하여 변환된 곡선의 방정식은?

① $y = \sqrt{x-2}-1$　　② $y = \sqrt{-x-4}+2$

③ $y = -\sqrt{x}-2$　　④ $y = -\sqrt{x}+2$

⑤ $y = -\sqrt{x-2}$

해설

$y = \sqrt{-x+2}+1$ 은 f 에 의하여

$y-1 = \sqrt{-(x+2)+2}+1$

$\therefore y = \sqrt{-x}+2$

다시 g에 의하여 $-y = \sqrt{-(-x)}+2$

$\therefore y = -\sqrt{x}-2$

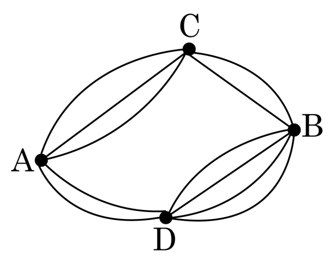
9. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개 ② 9 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로
$216 = 2^3 \times 3^3$,
$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 에서
G.C.D. : $2^3 \times 3^2$
따라서 공약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$

10. 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 갑, 을 두 사람이 A 지점에서 출발하여 B 지점 또는 C 지점을 거쳐 D 지점으로 가는 방법의 수는? (단, 갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않는다.)



① 80 ② 84 ③ 88 ④ 90 ⑤ 96

해설

갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않으므로 갑, 을이 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 갑 : $A \to B \to D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)

을 : $A \to C \to D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)

갑과 을은 동시에 길을 가므로, 이때 두 사람이 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6 \times 8 = 48$ (가지)

(ii) 갑 : $A \to C \to D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)

을 : $A \to B \to D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)

(i) 에서와 같은 방법으로 $6 \times 8 = 48$ (가지)

(i), (ii) 는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$48 + 48 = 96$ (가지)

11. 10000 원짜리 지폐 2장, 5000 원짜리 지폐 2장, 1000 원짜리 지폐 3장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는?

① 27 ② 35 ③ 42 ④ 60 ⑤ 81

해설

5000 원짜리 2장으로 지불할 수 있는 방법이 10000 원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 방법과 같으므로 10000 원짜리 지폐 2장을 5000 짜리 지폐 4장으로 바꾸면, 5000 짜리 지폐 6장, 1000 원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법과 같다.

$\therefore 7 \times 4 - 1 = 27$

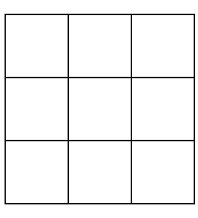
12. 5 원 짜리 동전 4 개, 10 원 짜리 동전 2 개, 100 원 짜리 동전 1 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인가?

① 10 ② 13 ③ 17 ④ 22 ⑤ 26

해설

5 원 짜리 동전 4 개이면 10 원 짜리 동전 2 개와 같으므로 금액이 중복된다.
10 원 짜리 동전 2 개를 5 원 짜리 동전 4 개로 바꾸면 5 원 짜리 동전 8 개, 100 원 짜리 동전 1 개가 되고 지불 방법의 수는
$(8+1)\times(1+1) = 18$(가지)
돈이 0 원이면 지불하는 것이 아니므로
$18-1 = 17$(가지)

13. 서로 다른 9 가지의 색으로 오른쪽 정사각형 모양의 모눈 칠판을 칠하는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 이 모눈 칠판은 회전해서 같은 모양이면 한 가지 경우로 생각한다.)



① $8!$ ② $9! \times \frac{1}{2}$ ③ $9! \times \frac{1}{3}$
④ $9! \times \frac{1}{4}$ ⑤ $9!$

해설

먼저 한 가운데에 있는 정사각형을 칠하는 색을 정한 다음, 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법을 생각한다. '가' 에 칠하는 색을 고르는 방법은 9 가지가 있다. 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 $\frac{8!}{4}$ 이므로

구하는 경우의 수는 $9 \times \frac{8!}{4} = \frac{9 \times 8!}{4} = 9! \times \frac{1}{4}$

14. $1, 2, 3, 4, 5$ 의 번호가 각각 적힌 5 개의 공을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 라고 쓰여진 주머니에 각각 1 개씩 넣을 때, 2 번 공은 A_1 에 넣고 k 번 공은 A_k 에 넣지 않는 경우의 수를 구하여라. (단, $k = 1, 3, 4, 5$)

▶ 답: 가지

▷ 정답: 11 가지

해설

2 번 공은 A_1 에 넣고 k 번 공은 A_k 에 넣지 않는 경우는 11 가지이다

15. *cellular* 의 8 개의 문자를 모음끼리 이웃하여 나열하는 방법의 수는?

① 705 ② 720 ③ 735 ④ 750 ⑤ 765

해설

l 이 3 번 반복되고, 모음을 하나로 보면, $\Rightarrow \frac{6!}{3!}$

여기에 모음을 배열하는 방법을 곱한다.

$\therefore \frac{6!}{3!} \times 3! = 720$

16. $A,\ B,\ C,\ D,\ E$의 5개의 문자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열할 때, A로 시작하는 경우의 수는?

① 12　　② 14　　③ 18　　④ 24　　⑤ 36

해설

$B,\ C,\ D,\ E$ 중 2개를 뽑아 나열하는 경우와 같다.

${}_4P_2 = 12$

17. 1, 2, 3, 4, 5 를 써서 만들 수 있는 세 자리 정수 중에서 각 자리의 숫자가 모두 다른 것은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 60 개

해설

$_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$(개)

18. $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 6 개의 숫자를 사용하여 만든 6 자리의 수 중에서 5 의 배수의 개수는?

① 64 개　② 128 개　③ 144 개
④ 216 개　⑤ 256 개

해설

5 의 배수는 일의 자리에 0 이 오거나 5 가 온다.
(ⅰ) 일의 자리가 0 인 수의 개수는
나머지 다섯 자리에 $1, 2, 3, 4, 5$ 를 배열하는 순열의 수와 같으므로 $5! = 120$
(ⅱ) 일의 자리가 5 인 수의 개수는
맨 앞에는 0 이 올 수 없으므로 $4 \times 4! = 96$
(ⅰ), (ⅱ) 에서 구하는 5 의 배수의 개수는
$120 + 96 = 216$

19. 0, 0, 1, 2, 3, 4를 써 놓은 6장의 카드 중에서 3장을 뽑아 나열하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 34 개

해설

1의 자리에 0, 2, 4가 오면 짝수이므로
$\times\times0$ 의 꼴 $\rightarrow 4\times4$, $\times\times2$ 의 꼴 $\rightarrow 3\times3$, $\times\times4$ 의 꼴 $\rightarrow 3\times3$
따라서 짝수의 개수는 $4\times4+3\times3+3\times3=34$ (개)

20. 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 4개를 택하여 네 자리 수를 만들 때, 홀수의 개수는?

① 32 ② 48 ③ 72 ④ 144 ⑤ 288

해설

일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5의 3가지, 천의 자리에 올 수 있는 수는 0과 일의 자리에 온 수를 제외한 4가지, 백의 자리에 올 수 있는 수는 천, 일의 자리에 온 수를 제외한 4가지, 십의 자리에 올 수 있는 수는 천, 백, 일의 자리에 온 수를 제외한 3가지이다.

$\therefore\ 3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$(가지)

21. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개　② 20 개　③ 25 개　④ 27 개　⑤ 30 개

해설

$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

22. 함수 $f(x) = -x+3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\cdots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \cdots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+3) = x$

$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$

$= f(x)$ 이므로

$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3$ 이므로

$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \ \cdots$

$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3$ 이다.

3이 1002 개이므로 $3 \times 1002 = 3006$

23. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

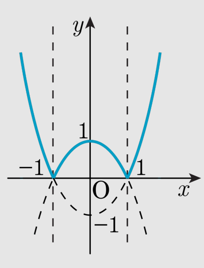
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1,\ x \geq 1$, $x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1,\ x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$



$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은 $\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$ 또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.

24. 양의 실수 전체의 집합 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = x^2 + 2x, h(x) = \dfrac{3x+1}{f(x)}$ 에 대하여, $(h \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{4}{3}$

해설

$f^{-1}(3) = a$라 하면 $f(a) = 3$
$f(a) = a^2 + 2a = 3$
$a^2 + 2a - 3 = 0, (a+3)(a-1) = 0$
$a > 0$ 이므로 $a = 1$
$\therefore f^{-1}(3) = 1, f(1) = 3$
$\therefore (h \circ f^{-1})(3) = h(f^{-1}(3)) = h(1)$
$h(1) = \dfrac{3+1}{f(1)} = \dfrac{4}{3}$

25. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$

$(f \circ f)(1) = (f(f(1)) = f(0) = -1$

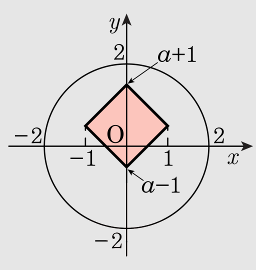
$\therefore\ x = -1$

26. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q : |x| + |y-a| \le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$　　② $-2 < a < 2$　　③ $-2 \le a \le 1$

④ $-1 \le a \le 1$　　⑤ $-2 \le a \le 2$

해설



두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q : |x| + |y-a| \le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$ 이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$|x| + |y-a| = 1$ 의 그래프는
$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid |x| + |y-a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$

27. 분수함수 $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

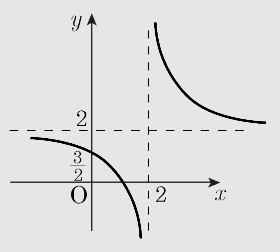
① $\left\{y \mid \dfrac{3}{2} < y < 2\right\}$　　② $\left\{y \mid \dfrac{3}{2} \leq y < 2\right\}$

③ $\left\{y \mid y \leq \dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$　　④ $\left\{y \mid y \leq -\dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$

⑤ $\left\{y \mid y \leq \dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$

해설

$y = \dfrac{2x-3}{x-2} = \dfrac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2}$



$x = 0$ 일 때, $y = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ 이므로,

치역은 $\left\{y \mid y \leq \dfrac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$

28. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은?(단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \cdots\cdots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\dfrac{3}{2}$　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$f(0) = 3,$

$f^2(0) = \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore\ f^{3n}(0) = 0$

$1999 = 666 \times 3 + 1$

$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$

29. 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 다음 보기중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

㉡ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$

㉢ $f^{-1}(x)=f(x)$ (단 f^{-1} 는 f 의 역함수)

① ㉡　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(-x)=\dfrac{-x+1}{-x-1}=\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}=\dfrac{1}{f(x)}$

㉡ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{\dfrac{1}{x}-1}=\dfrac{1+x}{1-x}\neq f(x)$

㉢ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=f(x)$

따라서 ㉠, ㉢

30. H고등학교 앞 분식점 메뉴에는 라면 요리가 4가지, 튀김 요리가 5가지 있다. 이 때, 라면 요리 2가지, 튀김 요리 3가지를 주문하는 방법의 수를 a ,특정한 라면 요리 1가지와 특정한 튀김 요리 2가지가 반드시 포함되도록 5가지 요리를 주문하는 방법의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=75$

해설

라면 요리 4 가지 중에서 2가지를 주문하는 방법의 수는 ${}_4C_2$ 이고, 튀김 요리 5 가지 중에서 3 가지를 주문하는 방법의 수는 ${}_5C_3$ 이므로

$a={}_4C_2\times{}_5C_3$

$=\dfrac{4\times3}{2\times1}\times\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=60$

또, 특정한 라면 요리 1 가지와 특정한 튀김 요리 2 가지를 포함하여 5 가지 요리를 주문하는 방법의 수는 특정한 라면 요리 1 가지와 튀김 요리 2 가지를 제외하고 나머지 6 가지의 요리 중에서 2 가지를 주문하는 방법과 같으므로

$b={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 $a+b=60+15=75$

31. 2000보다 작은 네 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자 중 두 개만 같은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 432 개

해설

$1\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ 인 네자리 자연수에서
같은 두수가 1 인 수의 개수는
${}_3C_1 \times {}_9P_2 = 216$
같은 두수가 1 이 아닌 수의 개수는
${}_9C_1 \times {}_3C_2 \times {}_8C_1 = 216$ 이므로
구하고자 하는 자연수의 개수는 432 개

32. 가로로 6개의 평행선과 세로로 4개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이때, 만들 수 있는 평행사변형은 모두 몇 개인가?

① 60 개 ② 90 개 ③ 120 개
④ 150 개 ⑤ 180 개

해설
가로와 세로에서 각각 2개씩을 선택하면 하나의 평행사변형이 만들어진다.
가로 줄에서 2개를 선택하는 경우의 수는
${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$,
세로 줄에서 2개를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$
따라서 구하는 평행사변형의 개수는 $15 \times 6 = 90$(개)

33. 운전석을 포함한 4 인용 승용차 3 대에 10 명이 나누어 타려고 한다. 운전 면허가 있는 사람이 3 명이고 이들은 각각 지정된 승용차를 운전한다고 할 때, 10 명이 차에 나누어 타는 방법의 수는?

① 850　　② 880　　③ 920　　④ 1000　　⑤ 1050

해설

운전 면허증이 있는 사람은 각각 자신의 자동차로 가니까 나머지 7 명을 세 자동차에 분배해주면 된다.
분배명수는 4 인용 승용차이므로 $(3,3,1)$ 과 $(2,2,3)$ 의 형태 두가지 밖에 없다.
따라서 분배방법의 수는 다음과 같다.

$$
{}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3!
$$
$$
+ {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3!
$$
$$
= 1050
$$

34. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$가 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에서 정의되어 있을 때, $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X의 원소의 개수를 a개라 할 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 4개

해설

$f(x)$가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면
$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$에서 $(x+2)$가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$가 2의 배수인 x는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.
1) $(x+2)$가 4의 배수일 경우 : $x = 2,\ 6,\ 10$
2) $(x-1)$이 4의 배수일 경우 : $x = 1,\ 5,\ 9$
$\therefore\ x = 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10$
따라서 $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 3, 4, 7, 8의 4개이다.
$\therefore\ a = 4$

35. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$ ② $2f(7)$ ③ $f(7)$ ④ $f(8)$ ⑤ $f(9)$

해설

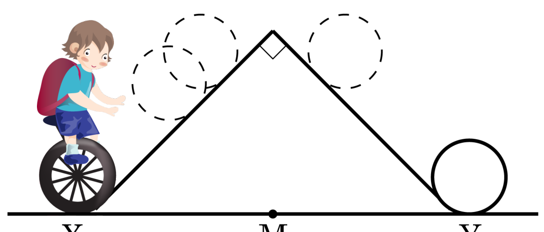
주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1)+f(n)$ 을 이용하여 $f(4)+f(5) = f(6)$ 이므로

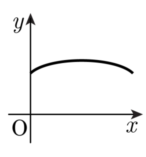
$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

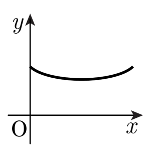
또 $f(5) + f(6) = f(7), f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로

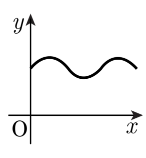
$2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.

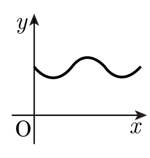
36. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y라 하고, 선분 XY의 중점을 M이라 하자. 철수가 X에서 출발하여 최단 거리로 Y까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t와 점 M에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d에 대하여 d를 t의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)

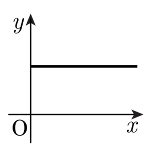


①


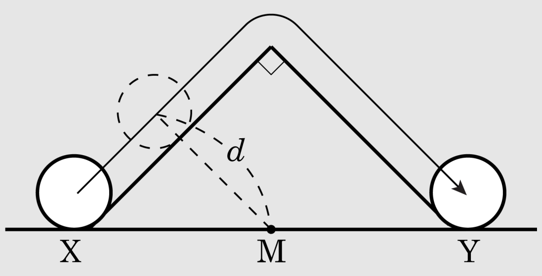
②


③


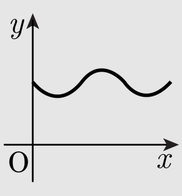
④


⑤


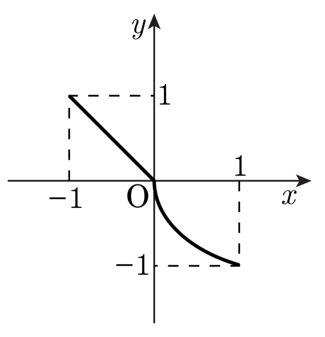
해설

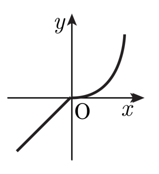


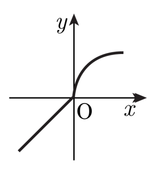
따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는

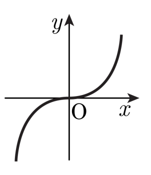


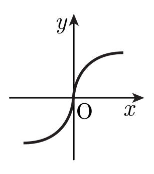
37. $1 \le x \le 1$ 에서 정의된 함수 f 를 $f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \le x \le 0) \\ -\sqrt{x} & (0 \le x \le 1) \end{cases}$ 로 정의하고, $g = f \circ f$ 라 할 때. 다음 중 $g^{-1}(x)$ 의 그래프를 그리면?

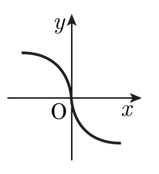


①


②


③


④


⑤


해설

$-1 \le x \le 0$ 일 때, $f(x) = -x \ge 0$ 이므로
$g(x) = f(f(x)) = f(-x) = -\sqrt{-x}$ 이다.
$0 \le x \le 1$ 일 때 $f(x) = -\sqrt{x} < 0$ 이므로
$g(x) = f(f(x)) = f(-\sqrt{x}) = -(-\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \le x \le 1) \\ -\sqrt{-x} & (-1 \le x \le 0) \end{cases}$ 이므로

$y = g(x)$ 의 그래프는 ④이다.
또한 $y = g^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로
③이다.

38. $\frac{x+y}{x}=\frac{y+z}{y}=\frac{z+x}{z}=k$일 때, $k^{2008}+\frac{1}{k^{2008}}$의 값을 구하면? (단, $xyz \neq 0,\ x \neq y \neq z$)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 5

해설

$x+y=kx \cdots$①, $y+x=kz \cdots$②, $z+x=ky \cdots$③

①+②+③하면 $2(x+y+z)=k(x+y+z)$

i) $x+y+z \neq 0$이면 $k=2$

① 에 대입하면 $x+y=2x, x=y$이 되므로

$x \neq y \neq z$인 조건에 모순

$\therefore x+y+z=0$

ii) $x+y+z=0$이면

$x+y=-z,\ y+z=-x,\ z+x=-y$

$-\frac{z}{x}=k, -\frac{x}{y}=k, -\frac{y}{z}=k$

세 식을 변변 곱하면 $k^3=-1$, $(k+1)(k^2-k+1)=0$

$k=-1$이면 $x=z$가 되므로 조건에 모순

$\therefore\ k^2-k+1=0$

$$\begin{cases} k^3=-1 \\ k+\frac{1}{k}=1 \end{cases}$$

$$k^{2008}+\frac{1}{k^{2008}}=(k^3)^{669}\times k+\frac{1}{(k^3)^{669}\times k}$$

$$=-(k+\frac{1}{k})=-1$$

해설

i) $1+\frac{y}{x}=1+\frac{z}{y}=1+\frac{x}{z}=k$에서

$\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{x}{z}=k-1$

$\therefore x=(k-1)z,\ y=(k-1)x,\ z=(k-1)y$

$xyz=(k-1)^3xyz$

$xyz \neq 0$이므로 $(k-1)^3=1$, $(k-1)^3-1=0$,

$\{(k-1)-1\}\{(k-1)^2+(k-1)+1\}=0$

$\therefore (k-2)(k^2-k+1)=0$

$x \neq y \neq z$이므로 $k \neq 2$

$\therefore k^2-k+1=0,\ k^3=-1$

$k+\frac{1}{k}=1$

ii) $k^{2008}+\frac{1}{k^{2008}}$

$=(k^3)^{669}\cdot k+\frac{1}{(k^3)^{669}\cdot k}$

$=-(k+\frac{1}{k})=-1$

39. 서울시의 전기 요금은 100kWh 이내로 사용한 경우는 6000 원이고, 100kWh 이상은 10kWh 증가할 때마다 1000 원씩 요금이 추가된다고 한다. 사용한 전기의 양을 AkWh , 전기 요금을 B원이라고 할 때, A와 B의 관계식은? (단, $A \ge 100$이고, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

① $B = 5000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$

② $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$

③ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{10}\right]$

④ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{11}\right]$

⑤ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{11}\right]$

해설

$100\text{kWh} \le A < 110\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 0$

$110\text{kWh} \le A < 120\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 1$

$120\text{kWh} \le A < 130\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 2$

$\vdots$

$\therefore\ B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$

40. $\sqrt{x^2+5x+13}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 4$

해설

$x^2+5x+13$ 이 완전제곱수이려면

$(x+2)^2 < x^2+5x+13 < (x+4)^2$ 에서 $x^2+5x+13 = (x+3)^2$

$\therefore\ x = 4$

41. 양수 x에 대하여 x의 정수 부분을 $[x]$, x의 소수 부분을 $< x >$라 하자. $a = 1+\sqrt{2}$일 때, $\left[< a > + \frac{1}{< a >} \right]$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a = 1+\sqrt{2} = 2.\times\times\times$이므로
a의 정수 부분은 2이다.
따라서, 소수 부분은 정수 부분을 뺀 부분이므로
$< a > = \sqrt{2}-1$이 된다.

$$\left[< a > + \frac{1}{< a >} \right]$$
$$= \left[\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1} \right]$$
$$= \left[\sqrt{2}-1+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \right]$$
$$= \left[\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1 \right]$$
$$= [2\sqrt{2}] = [2.\times\times\times] = 2$$

42. 두 함수 $y = \sqrt{x+4}$, $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

① $3 \le k < \frac{16}{3}$　　② $3 \le k < \frac{15}{4}$　　③ $4 \le k < \frac{17}{4}$

④ $4 \le k < \frac{16}{3}$　　⑤ $4 \le k < \frac{16}{5}$

해설

i) $y = x + k$ 가 점 $(-4, 0)$을 지날 때,

$0 = -4 + k \quad \therefore \ k = 4$

ii) $y = x + k$ 와 $y = \sqrt{x+4}$ 가 접할 때

$x + k = \sqrt{x+4}$ 의 양변을 제곱하면

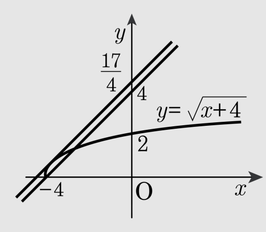
$x^2 + 2kx + k^2 = x + 4$

$x^2 + (2k-1)x + k^2 - 4 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4(k^2 - 4) = 0$

$-4k + 1 + 16 = 0 \quad \therefore k = \frac{17}{4}$

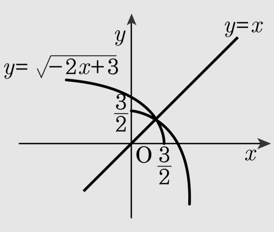
(i), (ii) 에서 $y = \sqrt{x+k}$ 와 $y = x + k$가 두 점에서 만나려면 $4 \le k < \frac{17}{4}$ 이어야 한다.



43. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설



함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면
$x = \sqrt{-2y+3}$ 이므로 두 함수는 서로 역함수의
관계에 있다.
따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,
$x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의
그래프는 아래 그림과 같으므로
두 함수의 그래프의 교점은
함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 의 그래프와
직선 $y = x$의 교점과 같다.
두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$의 을
제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2+2x-3 = 0$
$(x-1)(x+3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $0 \le x \le \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1,\ y = 1$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$ 이므로
$a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a+b = 2$