

1. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

① $f(x) = 1 - x$

② $f(x) = |x| + 1$

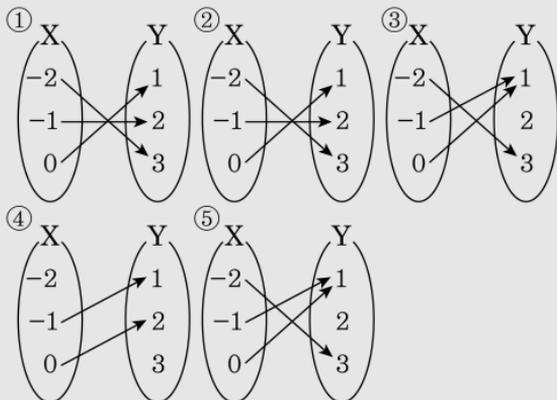
③ $f(x) = x^2 + x + 1$

④ $f(x) = x^3 + 2$

⑤ $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④ 이다.

2. 자연수의 집합을 N , 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q 는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q, 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2, 0)$$

②, ③, ④도 같은 방법으로 일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

3. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\therefore (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$$

4. 두 함수 f, g 를 $f(x) = x-1, g(x) = 2x+4$ 로 정의할 때, $(f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f$$

$$= f \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot f$$

$$= g^{-1} \cdot f$$

$$\therefore (f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3)$$

$$= (g^{-1} \cdot f)(3)$$

$$= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2)$$

이 때, $g^{-1}(2) = a$ 라 하면

$$g(a) = 2 \text{에서 } 2a + 4 = 2$$

$$\therefore a = -1$$

5. 유리수 a, b 가 등식 $(a + \sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$$

무리수의 상등에 의하여

$$\text{유리수 부분 : } (a^2 + 2) = 6, a^2 = 4$$

$$\text{무리수 부분 : } 2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}, 2a = b$$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4, ab = 8 \\ a = -2, b = -4, ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$$\therefore ab = 8$$

6. $y = \sqrt{4x - 12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3$, $\beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

7. 함수 $y = \sqrt{3x+6} + 1$ 의 그래프가 지나는 모든 사분면은?

① 제 1, 2 사분면

② 제 1, 3 사분면

③ 제 1, 4 사분면

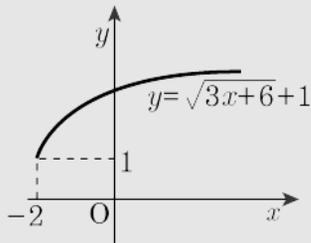
④ 제 1, 2, 3 사분면

⑤ 제 1, 3, 4 사분면

해설

$$y = \sqrt{3x+6} + 1 = \sqrt{3(x+2)} + 1$$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y = \sqrt{3x+6} + 1$ 의 그래프는 제 1, 2 사분면을 지난다.

8. $f : (x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$, $g : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 일 때, 곡선 $y = \sqrt{-x + 2} + 1$ 이 $g \circ f$ 에 의하여 변환된 곡선의 방정식은?

① $y = \sqrt{x - 2} - 1$

② $y = \sqrt{-x - 4} + 2$

③ $y = -\sqrt{x} - 2$

④ $y = -\sqrt{x} + 2$

⑤ $y = -\sqrt{x - 2}$

해설

$y = \sqrt{-x + 2} + 1$ 은 f 에 의하여

$$y - 1 = \sqrt{-(x + 2) + 2} + 1$$

$$\therefore y = \sqrt{-x} + 2$$

다시 g 에 의하여 $-y = \sqrt{-(-x)} + 2$

$$\therefore y = -\sqrt{x} - 2$$

9. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개

② 9 개

③ 12 개

④ 15 개

⑤ 16 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

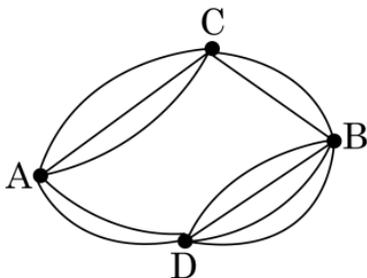
$$216 = 2^3 \times 3^3,$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ 에서}$$

$$\text{G.C.D. : } 2^3 \times 3^2$$

$$\text{따라서 공약수의 개수는 } (3 + 1) \times (2 + 1) = 12$$

10. 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 갑, 을 두 사람이 A 지점에서 출발하여 B 지점 또는 C 지점을 거쳐 D 지점으로 가는 방법의 수는? (단, 갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않는다.)



① 80

② 84

③ 88

④ 90

⑤ 96

해설

갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않으므로 갑, 을이 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 갑 : $A \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)

을 : $A \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)

갑과 을은 동시에 길을 가므로, 이때 두 사람이 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6 \times 8 = 48$ (가지)

(ii) 갑 : $A \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)

을 : $A \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)

(i) 에서와 같은 방법으로 $6 \times 8 = 48$ (가지)

(i), (ii) 는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$48 + 48 = 96$ (가지)

11. 10000 원짜리 지폐 2 장, 5000 원짜리 지폐 2 장, 1000 원짜리 지폐 3 장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는?

- ① 27 ② 35 ③ 42 ④ 60 ⑤ 81

해설

5000 원짜리 2 장으로 지불할 수 있는 방법이 10000 원짜리 지폐 1 장으로 지불할 수 있는 방법과 같으므로 10000 원짜리 지폐 2 장을 5000 짜리 지폐 4 장으로 바꾸면, 5000 짜리 지폐 6 장, 1000 원짜리 지폐 3 장으로 지불할 수 있는 방법과 같다.

$$\therefore 7 \times 4 - 1 = 27$$

12. 5원 짜리 동전 4개, 10원 짜리 동전 2개, 100원 짜리 동전 1개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인가?

① 10

② 13

③ 17

④ 22

⑤ 26

해설

5원 짜리 동전 4개이면 10원 짜리 동전 2개와 같으므로 금액이 중복된다.

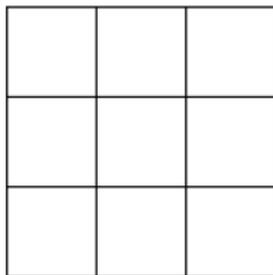
10원 짜리 동전 2개를 5원 짜리 동전 4개로 바꾸면 5원 짜리 동전 8개, 100원 짜리 동전 1개가 되고 지불 방법의 수는

$$(8 + 1) \times (1 + 1) = 18(\text{가지})$$

돈이 0원이면 지불하는 것이 아니므로

$$18 - 1 = 17(\text{가지})$$

13. 서로 다른 9 가지의 색으로 오른쪽 정사각형 모양의 모눈 칠판을 칠하는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 이 모눈 칠판은 회전해서 같은 모양이면 한 가지 경우로 생각한다.)



- ① $8!$ ② $9! \times \frac{1}{2}$ ③ $9! \times \frac{1}{3}$
 ④ $9! \times \frac{1}{4}$ ⑤ $9!$

해설

먼저 한 가운데에 있는 정사각형을 칠하는 색을 정한 다음, 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법을 생각한다. ‘가’에 칠하는 색을 고르는 방법은 9 가지가 있다. 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 $\frac{8!}{4}$ 이므로

$$\text{구하는 경우의 수는 } 9 \times \frac{8!}{4} = \frac{9 \times 8!}{4} = 9! \times \frac{1}{4}$$

14. 1, 2, 3, 4, 5 의 번호가 각각 적힌 5개의 공을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 라고 쓰여진 주머니에 각각 1 개씩 넣을 때, 2 번 공은 A_1 에 넣고 k 번 공은 A_k 에 넣지 않는 경우의 수를 구하여라. (단, $k = 1, 3, 4, 5$)

▶ 답: 가지

▷ 정답: 11가지

해설

2번 공은 A_1 에 넣고 k 번 공은 A_k 에 넣지 않는 경우는 11 가지이다

15. *cellular* 의 8 개의 문자를 모음끼리 이웃하여 나열하는 방법의 수는?

① 705

② 720

③ 735

④ 750

⑤ 765

해설

l 이 3 번 반복되고, 모음을 하나로 보면, $\Rightarrow \frac{6!}{3!}$

여기에 모음을 배열하는 방법을 곱한다.

$$\therefore \frac{6!}{3!} \times 3! = 720$$

16. A, B, C, D, E 의 5개의 문자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열할 때, A 로 시작하는 경우의 수는?

① 12

② 14

③ 18

④ 24

⑤ 36

해설

B, C, D, E 중 2개를 뽑아 나열하는 경우와 같다.

$${}_4P_2 = 12$$

17. 1, 2, 3, 4, 5 를 써서 만들 수 있는 세 자리 정수 중에서 각 자리의 숫자가 모두 다른 것은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 60 개

해설

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60(\text{개})$$

18. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 사용하여 만든 6 자리의 수 중에서 5 의 배수의 개수는?

① 64 개

② 128 개

③ 144 개

④ 216 개

⑤ 256 개

해설

5 의 배수는 일의 자리에 0 이 오거나 5 가 온다.

(i) 일의 자리가 0 인 수의 개수는

나머지 다섯 자리에 1, 2, 3, 4, 5 를 배열하는 순열의 수와
같으므로 $5! = 120$

(ii) 일의 자리가 5 인 수의 개수는

맨 앞에는 0 이 올 수 없으므로 $4 \times 4! = 96$

(i), (ii)에서 구하는 5 의 배수의 개수는

$$120 + 96 = 216$$

19. 0, 0, 1, 2, 3, 4를 써 놓은 6장의 카드 중에서 3장을 뽑아 나열하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 34 개

해설

1의 자리에 0, 2, 4가 오면 짝수이므로

$\times \times 0$ 의 꼴 $\rightarrow 4 \times 4$, $\times \times 2$ 의 꼴 $\rightarrow 3 \times 3$, $\times \times 4$ 의 꼴 $\rightarrow 3 \times 3$

따라서 짝수의 개수는 $4 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 3 = 34$ (개)

20. 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 4개를 택하여 네 자리 수를 만들 때, 홀수의 개수는?

① 32

② 48

③ 72

④ 144

⑤ 288

해설

일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5의 3가지, 천의 자리에 올 수 있는 수는 0과 일의 자리에 온 수를 제외한 4가지, 백의 자리에 올 수 있는 수는 천, 일의 자리에 온 수를 제외한 4가지, 십의 자리에 올 수 있는 수는 천, 백, 일의 자리에 온 수를 제외한 3가지이다.

$$\therefore 3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144(\text{가지})$$

21. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로

A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

22. 함수 $f(x) = -x + 3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, \dots , $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \dots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 3) = x$$

$$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$$

$$= f(x) \text{ 이므로}$$

$$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \dots$$

$$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3 \text{ 이다.}$$

$$3 \text{ 이 } 1002 \text{ 개이므로 } 3 \times 1002 = 3006$$

23. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1, x \geq 1, x^2 - 1 < 0$
이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| =$

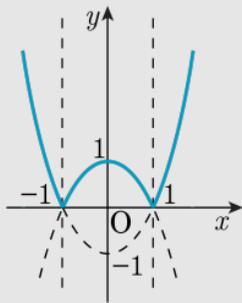
$$\begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1, x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$$

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로
함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.



24. 양의 실수 전체의 집합 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = x^2 + 2x, h(x) = \frac{3x+1}{f(x)}$ 에 대하여, $(h \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

- ① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$$f^{-1}(3) = a \text{라 하면 } f(a) = 3$$

$$f(a) = a^2 + 2a = 3$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, (a+3)(a-1) = 0$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 1$$

$$\therefore f^{-1}(3) = 1, f(1) = 3$$

$$\therefore (h \circ f^{-1})(3) = h(f^{-1}(3)) = h(1)$$

$$h(1) = \frac{3+1}{f(1)} = \frac{4}{3}$$

25. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$

26. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$

② $-2 < a < 2$

③ $-2 \leq a \leq 1$

④ $-1 \leq a \leq 1$

⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,

$q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여

q 는 p 이기 위한 충분조건이므로

각각의 진리집합을 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이다.

$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고

반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는

$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

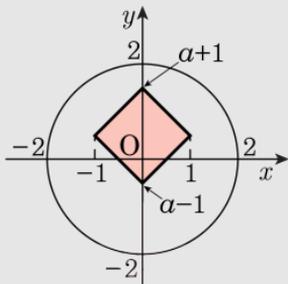
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$ 하려면 다음 그림에서

$a + 1 \leq 2, a - 1 \geq -2$

$\therefore -1 \leq a \leq 1$

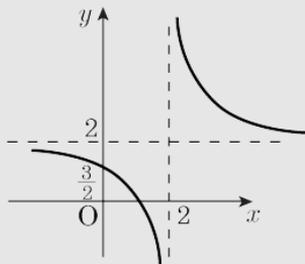


27. 분수함수 $y = \frac{2x-3}{x-2}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을
바르게 구한 것은?

- ① $\left\{y \mid \frac{3}{2} < y < 2\right\}$ ② $\left\{y \mid \frac{3}{2} \leq y < 2\right\}$
 ③ $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$ ④ $\left\{y \mid y \leq -\frac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$
 ⑤ $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$

해설

$$y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$



$x = 0$ 일 때, $y = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ 이므로,

치역은 $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$

28. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은? (단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \dots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\frac{3}{2}$

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$f(0) = 3,$$

$$f^2(0) = \frac{6-3}{3-1} = \frac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore f^{3n}(0) = 0$$

$$1999 = 666 \times 3 + 1$$

$$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$$

29. 함수 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 다음 보기중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

㉡ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

㉢ $f^{-1}(x) = f(x)$ (단 f^{-1} 는 f 의 역함수)

① ㉡

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠ } f(-x) &= \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

$$\text{㉡ } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1+x}{1-x} \neq f(x)$$

$$\text{㉢ } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x)$$

따라서 ㉠, ㉢

30. H고등학교 앞 분식점 메뉴에는 라면 요리가 4가지, 튀김 요리가 5가지 있다. 이 때, 라면 요리 2가지, 튀김 요리 3가지를 주문하는 방법의 수를 a , 특정한 라면 요리 1가지와 특정한 튀김 요리 2가지가 반드시 포함되도록 5가지 요리를 주문하는 방법의 수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 75$

해설

라면 요리 4 가지 중에서 2가지를 주문하는 방법의 수는 ${}_4C_2$ 이고, 튀김 요리 5 가지 중에서 3 가지를 주문하는 방법의 수는 ${}_5C_3$ 이므로

$$\begin{aligned} a &= {}_4C_2 \times {}_5C_3 \\ &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 60 \end{aligned}$$

또, 특정한 라면 요리 1 가지와 특정한 튀김 요리 2 가지를 포함하여 5 가지 요리를 주문하는 방법의 수는 특정한 라면 요리 1 가지와 튀김 요리 2 가지를 제외하고 나머지 6 가지의 요리 중에서 2 가지를 주문하는 방법과 같으므로

$$b = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서 $a + b = 60 + 15 = 75$

32. 가로로 6개의 평행선과 세로로 4개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이때, 만들 수 있는 평행사변형은 모두 몇 개인가?

① 60 개

② 90 개

③ 120 개

④ 150 개

⑤ 180 개

해설

가로와 세로에서 각각 2개씩을 선택하면 하나의 평행사변형이 만들어진다.

가로 줄에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15,$$

세로 줄에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는 $15 \times 6 = 90(\text{개})$

33. 운전석을 포함한 4인용 승용차 3대에 10명이 나누어 타려고 한다. 운전 면허가 있는 사람이 3명이고 이들은 각각 지정된 승용차를 운전한다고 할 때, 10명이 차에 나누어 타는 방법의 수는?

① 850

② 880

③ 920

④ 1000

⑤ 1050

해설

운전 면허증이 있는 사람은 각각 자신의 자동차로 가니까 나머지 7명을 세 자동차에 분배해주면 된다.

분배명수는 4인용 승용차이므로 (3, 3, 1) 과 (2, 2, 3) 의 형태 두가지 밖에 없다.

따라서 분배방법의 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & {}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! \\
 & + {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3! \\
 & = 1050
 \end{aligned}$$

35. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$

② $2f(7)$

③ $f(7)$

④ $f(8)$

⑤ $f(9)$

해설

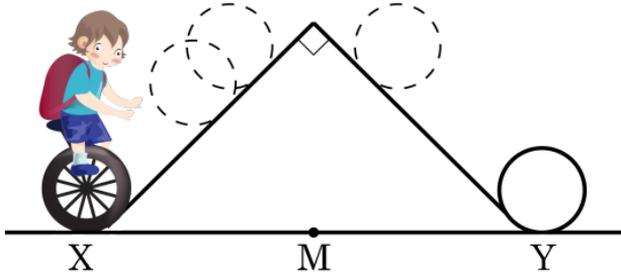
주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1) + f(n)$ 을 이용하여 $f(4) + f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7)$, $f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로

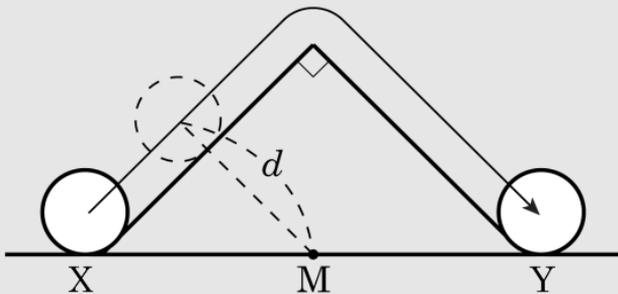
$$2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8) \text{ 이다.}$$

36. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y 라 하고, 선분 XY 의 중점을 M 이라 하자. 철수가 X 에서 출발하여 최단 거리로 Y 까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t 와 점 M 에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d 에 대하여 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)

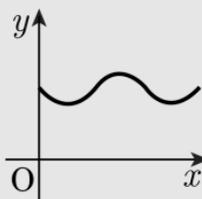


- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

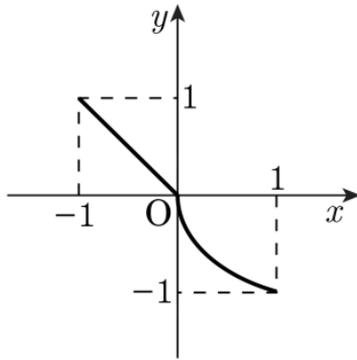
해설



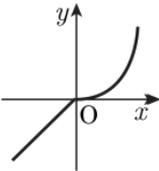
따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는



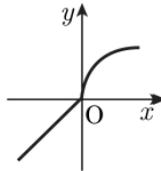
37. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수 f 를 $f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \leq x \leq 0) \\ -\sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 로 정의하고, $g = f \circ f$ 라 할 때, 다음 중 $g^{-1}(x)$ 의 그래프를 그리면?



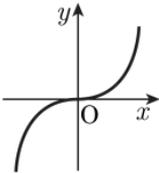
①



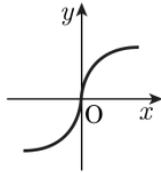
②



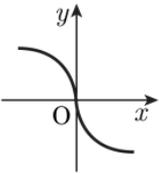
③



④



⑤



해설

$-1 \leq x \leq 0$ 일 때, $f(x) = -x \geq 0$ 이므로

$g(x) = f(f(x)) = f(-x) = -\sqrt{-x}$ 이다.

$0 \leq x \leq 1$ 일 때 $f(x) = -\sqrt{x} < 0$ 이므로

$g(x) = f(f(x)) = f(-\sqrt{x}) = -(-\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \\ -\sqrt{-x} & (-1 \leq x \leq 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$y = g(x)$ 의 그래프는 ④이다.

또한 $y = g^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로

③이다.

38. $\frac{x+y}{x} = \frac{y+z}{y} = \frac{z+x}{z} = k$ 일 때, $k^{2008} + \frac{1}{k^{2008}}$ 의 값을 구하면? (단, $xyz \neq 0, x \neq y \neq z$)

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 5

해설

$$x + y = kx \cdots \textcircled{1}, y + z = ky \cdots \textcircled{2}, z + x = kz \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ 하면 } 2(x + y + z) = k(x + y + z)$$

$$\text{i) } x + y + z \neq 0 \text{ 이면 } k = 2$$

① 에 대입하면 $x + y = 2x, x = y$ 이 되므로
 $x \neq y \neq z$ 인 조건에 모순

$$\therefore x + y + z = 0$$

$$\text{ii) } x + y + z = 0 \text{ 이면}$$

$$x + y = -z, y + z = -x, z + x = -y$$

$$-\frac{z}{x} = k, -\frac{x}{y} = k, -\frac{y}{z} = k$$

세 식을 변변 곱하면 $k^3 = -1, (k+1)(k^2 - k + 1) = 0$

$k = -1$ 이면 $x = z$ 가 되므로 조건에 모순

$$\therefore k^2 - k + 1 = 0$$

$$\begin{cases} k^3 = -1 \\ k + \frac{1}{k} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k^{2008} + \frac{1}{k^{2008}} &= (k^3)^{669} \times k + \frac{1}{(k^3)^{669} \times k} \\ &= -(k + \frac{1}{k}) = -1 \end{aligned}$$

해설

$$\text{i) } 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{z}{y} = 1 + \frac{x}{z} = k \text{ 에서}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{x}{z} = k - 1$$

$$\therefore x = (k-1)z, y = (k-1)x, z = (k-1)y$$

$$xyz = (k-1)^3 xyz$$

$$xyz \neq 0 \text{ 이므로 } (k-1)^3 = 1, (k-1)^3 - 1 = 0,$$

$$\{(k-1) - 1\} \{(k-1)^2 + (k-1) + 1\} = 0$$

$$\therefore (k-2)(k^2 - k + 1) = 0$$

$x \neq y \neq z$ 이므로 $k \neq 2$

$$\therefore k^2 - k + 1 = 0, k^3 = -1$$

$$k + \frac{1}{k} = 1$$

$$\text{ii) } k^{2008} + \frac{1}{k^{2008}}$$

$$= (k^3)^{669} \cdot k + \frac{1}{(k^3)^{669} \cdot k}$$

$$= -(k + \frac{1}{k}) = -1$$

39. 서울시의 전기 요금은 100kWh 이내로 사용한 경우는 6000 원이고, 100kWh 이상은 10kWh 증가할 때마다 1000 원씩 요금이 추가된다고 한다. 사용한 전기의 양을 A kWh, 전기 요금을 B 원이라고 할 때, A 와 B 의 관계식은? (단, $A \geq 100$ 이고, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

① $B = 5000 + 1000 \left[\frac{A - 100}{10} \right]$

② $B = 6000 + 1000 \left[\frac{A - 100}{10} \right]$

③ $B = 6000 + 1000 \left[\frac{A - 101}{10} \right]$

④ $B = 6000 + 1000 \left[\frac{A - 100}{11} \right]$

⑤ $B = 6000 + 1000 \left[\frac{A - 101}{11} \right]$

해설

100kWh $\leq A < 110$ kWh 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 0$

110kWh $\leq A < 120$ kWh 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 1$

120kWh $\leq A < 130$ kWh 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 2$

⋮

$$\therefore B = 6000 + 1000 \left[\frac{A - 100}{10} \right]$$

40. $\sqrt{x^2 + 5x + 13}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 4$

해설

$x^2 + 5x + 13$ 이 완전제곱수이려면

$(x+2)^2 < x^2 + 5x + 13 < (x+4)^2$ 에서 $x^2 + 5x + 13 = (x+3)^2$

$\therefore x = 4$

41. 양수 x 에 대하여 x 의 정수 부분을 $[x]$, x 의 소수 부분을 $\langle x \rangle$ 라 하자.

$a = 1 + \sqrt{2}$ 일 때, $\left[\langle a \rangle + \frac{1}{\langle a \rangle} \right]$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a = 1 + \sqrt{2} = 2.\times\times\times$ 이므로

a 의 정수 부분은 2이다.

따라서, 소수 부분은 정수 부분을 뺀 부분이므로

$\langle a \rangle = \sqrt{2} - 1$ 이 된다.

$$\begin{aligned} & \left[\langle a \rangle + \frac{1}{\langle a \rangle} \right] \\ &= \left[\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right] \\ &= \left[\sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \right] \\ &= \left[\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 \right] \\ &= [2\sqrt{2}] = [2.\times\times\times] = 2 \end{aligned}$$

42. 두 함수 $y = \sqrt{x+4}$, $y = x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $3 \leq k < \frac{16}{3}$

② $3 \leq k < \frac{15}{4}$

③ $4 \leq k < \frac{17}{4}$

④ $4 \leq k < \frac{16}{3}$

⑤ $4 \leq k < \frac{16}{5}$

해설

i) $y = x + k$ 가 점 $(-4, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -4 + k \quad \therefore k = 4$$

ii) $y = x + k$ 와 $y = \sqrt{x+4}$ 가 접할 때

$x + k = \sqrt{x+4}$ 의 양변을 제곱하면

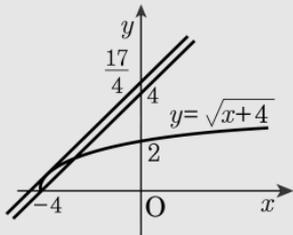
$$x^2 + 2kx + k^2 = x + 4$$

$$x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 4 = 0$$

$$D = (2k - 1)^2 - 4(k^2 - 4) = 0$$

$$-4k + 1 + 16 = 0 \quad \therefore k = \frac{17}{4}$$

(i), (ii)에서 $y = \sqrt{x+k}$ 와 $y = x+k$ 가 두 점에서 만나려면 $4 \leq k < \frac{17}{4}$ 이어야 한다.



43. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$x = \sqrt{-2y+3}$ 이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,

$x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$ 의 을 제공하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$(x-1)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -3$$

그런데 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1$, $y = 1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로

$$a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

