1. y가 x의 제곱에 비례하고, $x = -2$일 때 $y = -12$이다. y를 x에 관한 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $y = 6x^2$ ② $y = 3x^2$ ③ $y = 2x^2$
④ $y = -3x^2$ ⑤ $y = -6x^2$

해설

$y = ax^2 (a \neq 0)$에 $(-2,\ -12)$를 대입하면, $-12 = a \times (-2)^2$, $a = -3$
$\therefore\ y = -3x^2$

2. x 축에 대해 대칭인 것끼리 짝지은 것은?

㉠ $y=-2x^2$	㉡ $y=-\frac{1}{4}x^2$	㉢ $y=-\frac{1}{3}x^2$
㉣ $y=3x^2$	㉤ $y=\frac{1}{2}x^2$	㉥ $y=\frac{1}{4}x^2$

① ㉠,㉤ ② ㉡,㉥ ③ ㉢,㉣ ④ ㉡,㉤ ⑤ ㉣,㉥

해설

x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이다.

3. 다음은 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프에 대한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$ 이다.

② y 축에 대칭인 포물선이다.

③ $x > 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

④ y 의 값의 범위는 $y \leq 0$ 이다.

⑤ $y = -2x^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다.

해설

① 꼭짓점은 $(0,\ 0)$

④ y 의 값의 범위는 $y \geq 0$

4. 점$(2,\ 5)$ 는 이차함수 $y=2x^2+q$ 위의 점일 때, 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$　② $(0,\ 3)$　③ $(0,\ -3)$
④ $(3,\ 0)$　⑤ $(-3,\ 3)$

해설

$y=2x^2+q$ 의 그래프가 점 $(2,\ 5)$ 를 지나므로
$5=2(2)^2+q \quad \therefore q=-3$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -3)$ 이다.

5. 이차함수 $y = 2(x+1)^2 - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 포물선의 식은?

① $y = 2(x+2)^2 + 4$
② $y = -2(x+3)^2 + 3$
③ $y = 2(x-1)^2 + 3$
④ $y = -2(x-1)^2 + 3$
⑤ $y = 2(x+3)^2 + 3$

해설

$y = 2(x+1+2)^2 - 1 + 4$
$\therefore y = 2(x+3)^2 + 3$

6. 함수 $f : R \to R$ 에서 $f(x) = x^2 - x - 2$ 이다. $f(a) = 4$ 일 때, 양수 a의 값은?(단, R은 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(a) = 4$ 이므로

$a^2 - a - 2 = 4$, $a^2 - a - 6 = 0$, $(a-3)(a+2) = 0$

$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = -2$

한편, $a > 0$ 이므로 $a = 3$ 이다.

7. 이차함수 $y=\frac{4}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5 만큼 평행이동하면 점 $(8,\ k)$ 를 지난다. 이 때, k 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y=ax^2$ 의 그래프를 x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y=a(x-p)^2$ 이므로 $y=\frac{4}{3}(x-5)^2$ 이고, x 의 값이 8 이므로 대입하면 $y=12$ 이다. 따라서 $k=12$ 이다.

8. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 식이 $y = a(x+p)^2 + q$ 일 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값은?

① 30 ② 20 ③ 10 ④ -6 ⑤ -5

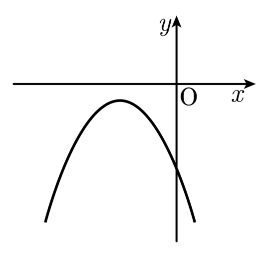
해설

이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동하면 $y = -2(x-3)^2 - 5$ 이고, y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = -2(-x-3)^2 - 5 = -2(x+3)^2 - 5$ 이다.

$\therefore a = -2,\ p = 3,\ q = -5$

$\therefore apq = (-2) \times 3 \times (-5) = 30$

9. 이차함수 $y = -a(x-p)^2 - q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a, p, q 의 부호로 알맞은 것은?



① $a > 0,\ p > 0,\ q < 0$
② $a > 0,\ p > 0,\ q > 0$
③ $a > 0,\ p < 0, q > 0$
④ $a < 0,\ p = 0, q < 0$
⑤ $a < 0,\ p > 0, q = 0$

해설

$y = -a(x-p)^2 - q$ 의 그래프는 위로 볼록하므로 $-a < 0,\ a > 0$ 이고 꼭짓점의 좌표가 제 3 사분면 위에 있으므로 $p < 0$ 이고 $-q < 0,\ q > 0$ 이다.

10. 다음 이차함수의 그래프 중 $y = 3x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 것을 모두 고르면?

① $y = 3x^2 + 1$

② $y = -3x^2 + 4$

③ $y = \dfrac{9x^2 - 1}{3}$

④ $y = -3(x+1)^2$

⑤ $y = x^2 - 5x + 2 + 2(x-1)(x+1)$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 a 의 값이 같으면 평행이동하여 두 이차함수의 그래프를 완전히 포갤 수 있다.
따라서 $a = 3$ 인 것은 ①, ③, ⑤이다.

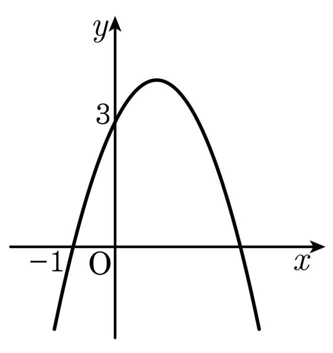
11. 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$ 인 포물선이 두 점 $(2,\ -3)$, $(m, -6)$ 을 지날 때, 다음 중 m 의 값은?

① -1　② 5　③ -3　④ -6　⑤ -9

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$ 이므로
$y = a(x-1)^2 - 2$ 이고 점 $(2,\ -3)$ 을 지나므로 $-3 = a(2-1)^2 - 2$
$a = -1$ 이다.
$y = -(x-1)^2 - 2$
점 $(m, -6)$ 을 지나므로
$-6 = -(m-1)^2 - 2$
$\therefore m = 3$ 또는 $m = -1$

12. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + 2x + c$ 의 그래프이다. 이차함수의 최댓값은?



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$y = ax^2 + 2x + c$ 에 점$(-1,\ 0),\ (0,\ 3)$ 을 대입하면
$0 = a - 2 + c$
$3 = c,\ a = -1$
$y = -x^2 + 2x + 3$
$\therefore y = -(x-1)^2 + 4$
따라서 최댓값은 4 이다.

13. 차가 12 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소가 될 때, 두 수 중 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 수를 각각 x, $x+12$ 라 하면

$y = x(x+12)$

$\quad = x^2 + 12$

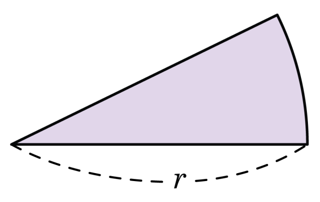
$x = (x+6)^2 - 36$

$x = -6$ 일 때, 최솟값 -36 을 갖는다.

$x = -6$, $-6+12 = 6$

따라서 두 수 중에서 큰 수는 6 이다.

14. 둘레의 길이가 20cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는?



① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

부채꼴의 호의 길이는 $l = (20 - 2r)\text{cm}$
부채꼴의 넓이를 y라 하면
$y = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = (10 - r)r = -(r - 5)^2 + 25$
따라서 꼭짓점이 $(5, 25)$ 이므로 반지름의 길이가 $5\,\text{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 25cm^2를 가진다.

15. 포물선 $y = x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$ 이 x 축과 만나는 두 점의 사이의 거리가 1 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$y = x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$ 의

x 절편을 α, β $(\alpha > \beta)$ 라고 하면

$\alpha + \beta = -2a$, $\alpha\beta = a - \frac{1}{2}$ 이다.

$\alpha - \beta = 1$ 이므로

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이다.

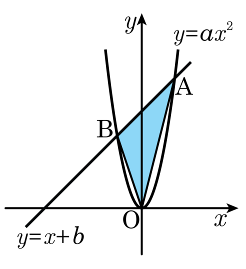
$1 = 4a^2 - 4a + 2$

$4a^2 - 4a + 1 = 0$

$(2a - 1)^2 = 0$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

16. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프와 직선 $y = x+b$ 가 점 A $(2,\ 8)$ 과 점 B 에서 만날 때, △ABO 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{21}{2}$

해설

$y = ax^2$ 에 점 $(2,\ 8)$ 을 대입, $8 = 4a,\ a = 2 \quad \therefore\ y = 2x^2$

$y = x + b$ 에 점 $(2,\ 8)$ 을 대입, $8 = 2 + b,\ b = 6 \quad \therefore\ y = x + 6$

$y = 2x^2$ 과 $y = x + 6$ 의 교점을 구하면

$2x^2 = x + 6$

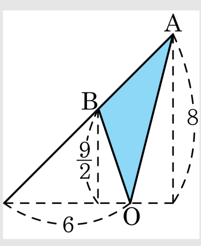
$2x^2 - x - 6 = 0$

$(2x + 3)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = 2$

$\therefore$ B $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

$y = x + 6$ 에서 $x = -6$ 일 때, $y = 0$ 이므로



△ABO 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$ 이다.

17. 세 점 $(-1,\ -5)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$ 일 때, $p-q$ 의 값은?

① 1　　② 5　　③ −5　　④ −1　　⑤ −11

해설

이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라고 놓으면
$(-1,-5)$를 지나므로 $-5=a-b+5$
$(0,5)$를 지나므로 $5=c$
$(2,13)$ 을 지나므로 $13=4a+2b+5$
$\therefore a=-2,\ b=8,\ c=5$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-2x^2+8x+5=-2(x-2)^2+13$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 13)$ 이므로
$p-q=-11$ 이다.

18. 이차함수 $y=2x^2-8x+3a-4$ 의 최솟값은 -5보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3　　② $-\frac{3}{8}$　　③ $\frac{3}{8}$　　④ 3　　⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-8x+3a-4 \\ &= 2(x^2-4x+4-4)+3a-4 \\ &= 2(x-2)^2-12+3a \end{aligned}$$

$y=2(x-2)^2-12+3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a+5=2(2a-2)^2-12+3a$

$8a^2-21a-9=0,\ (8a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12+3a>-5$ 이므로

$i)\ a=-\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-12-\frac{9}{8}=-\frac{105}{8}<-5$$

$ii) a=3$ 대입 : $-12+3\times3=-12+9=-3>-5$

따라서 $a=3$ 이다.

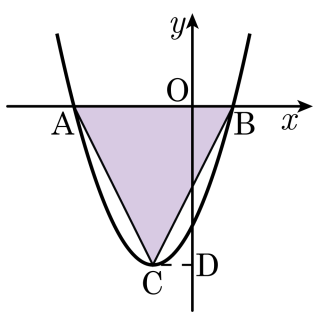
19. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$
$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 1$$
$$\therefore a + b + c = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) + 1 = -\frac{3}{2}$$

20. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 점을 A ,꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이는?



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

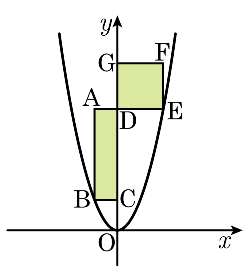
C$(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

A$(-3, 0)$, B$(1, 0)$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

21. 다음 그림에서 포물선은 $y = 2x^2$ 이고, 직사각형 ABCD 의 넓이와 정사각형 DEFG 의 넓이는 같다. $\overline{\mathrm{DE}} = 2\overline{\mathrm{AD}}$ 일 때, 점 E 의 x 좌표값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{3}$

해설

점 E 의 x 좌표값을 p라 하면 $\overline{\mathrm{DE}} = 2\overline{\mathrm{AD}} = p$ 이다.

$\square\mathrm{ABCD} = \square\mathrm{DEFG}$ 에서 $\overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{DE}}^2$,

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}} \times \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{DE}}^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CD}} = 2p \quad \cdots ㉠$

또, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AD}} = \frac{p}{2}$ 이므로 점 B$\left(-\frac{p}{2}, \frac{p^2}{2}\right)$, $\overline{\mathrm{OC}} = \frac{p^2}{2}$,

$\overline{\mathrm{DE}} = p$ 에서 점 E$(p,\ 2p^2)$, $\overline{\mathrm{OD}} = 2p^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{OD}} - \overline{\mathrm{OC}} = 2p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{3}{2}p^2 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\frac{3}{2}p^2 = 2p$, $p(3p - 4) = 0$

$\therefore\ p = \frac{4}{3}(\because\ p > 0)$

따라서 점 E 의 x 좌표값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

22. x축 위의 두 점 A(5, 0), B(−3, 0)과 이차함수 $y = a(x+1)^2$의 그래프와 직선 $y = -12$와의 두 교점 C, D를 연결한 사각형은 평행사변형일 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.
$\overline{AB} = \overline{CD} = 8$
점 C와 D는 직선 $x = -1$을 중심으로 좌우대칭이므로 B(−5, −12), C(3, −12)
점 C와 점 D는 $y = a(x+1)^2$ 위의 점이므로
$-12 = 16a$
$\therefore\ a = -\frac{3}{4}$

23. 이차함수 $y = 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18$ 의 그래프의 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있을 때, k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-3 < k < 0$

해설

$y = 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18$
$= 3(x+k)^2 - 3k^2 + 4k^2 - 3k - 18$
$= 3(x+k)^2 + k^2 - 3k - 18$

꼭짓점은 $(-k,\ k^2 - 3k - 18)$
이때, 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있으므로
$-k > 0 \quad \therefore\ k < 0$
$k^2 - 3k - 18 < 0$
$(k+3)(k-6) < 0$
$\therefore\ -3 < k < 6$
따라서 $-3 < k < 0$ 이다.

24. x 의 범위가 $0 < x < 5$ 일 때, $x = \frac{1}{x - [x]}$ 을 만족시키는 x 의 개수를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대정수이다.)

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$x^2 - x[x] - 1 = 0$ 에서
(1) $0 < x < 1$ 일 때,
$[x] = 0, \quad x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$ $0 < x < 1$ 이므로 부적합
(2) $1 \le x < 2$ 일 때,
$[x] = 1, \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $2 \le x < 2$ 이므로
$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
(3) $2 \le x < 3$ 일 때,
$[x] = 2, \quad x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$ $2 \le x < 3$ 이므로
$x = 1 + \sqrt{2}$
(4) $3 \le x < 4$ 일 때,
$[x] = 3, \quad x^2 - 3x - 1 = 0, \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ $3 \le x < 4$ 이므로
$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$
(5) $4 \le x < 5$ 일 때,
$[x] = 4, \quad x^2 - 4x - 1 = 0, \quad x = 2 \pm \sqrt{5}$ $4 \le x < 5$ 이므로
$x = 2 + \sqrt{5}$
(1), (2), (3), (4), (5) 로 부터 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$, $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x = 2 + \sqrt{5}$ 의 4개

25. 함수 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{ax^2 - 3x + a - 2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y = ax^2 - 3x + a - 2 \cdots$ ㉠이 최솟값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $a > 0 \cdots$ ㉡
$D = -4a^2 + 8a + 9 < 0 \cdots$ ㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.
$-4a^2 + 8a + 9 < 0$ 에서 $a < \dfrac{2 - \sqrt{13}}{2}$, $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2}$
따라서 ㉡과의 공통 범위를 구하면 $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2} = 2.80$ 이므로 $a = 3$ 이다.