1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 2 는 소수이다.

② 1 과 그 수 자신만의 약수를 가지는 자연수를 소수라 한다.

③ 1 은 소수가 아니다.

④ 합성수는 약수가 3 개 이상인 수이다.

⑤ 소수는 약수가 1 개뿐이다.

해설

소수는 약수가 2 개이다.

2. 다음 중 소인수분해가 바르게 된 것은?

① $26 = 2 \times 13$ ② $36 = 2^3 \times 3^2$ ③ $42 = 6 \times 7$

④ $54 = 2^2 \times 3^3$ ⑤ $128 = 2^8$

해설

② $2^2 \times 3^2$

③ $2 \times 3 \times 7$

④ 2×3^3

⑤ 2^7

3. 1 부터 50 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 50 까지의 완전제곱수를 구하면
$7^2 = 49 < 50$ 이고 $11^2 = 121 > 50$ 이므로
50 이하인 소수의 완전제곱수는
2^2, 3^2, 5^2, 7^2 이다.

4. 세 수 $2^2 \times 3^3 \times 7$, $2^3 \times 5^2 \times 7$, $2^3 \times 5^4 \times 7^3$ 의 최대공약수는?

① $2^3 \times 5^3$ ② $2^3 \times 3^2$ ③ $3^2 \times 5^2$

④ $2^2 \times 7$ ⑤ $3^3 \times 7^3$

해설

$2^2 \times 3^3 \times 7$, $2^3 \times 5^2 \times 7$, $2^3 \times 5^4 \times 7^3$ 에서

최대공약수 : $2^2 \times 7$ (지수가 작은 쪽)

5. 다음 세 수의 공약수의 개수를 구하면?

$2^3 \times 3^2 \times 5,\quad 2^2 \times 3^3 \times 7,\quad 2^3 \times 3^2$

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

세 수의 최대공약수는 $2^2 \times 3^2$ 이고
공약수는 최대공약수의 약수이다.
따라서 $2^2 \times 3^2$ 의 약수의 개수가 $(2+1) \times (2+1) = 9$(개)이므로
공약수의 개수는 9 개이다.

6. 다음 중 3 의 배수인 것은?

① 124 ② 263 ③ 772 ④ 305 ⑤ 273

해설

3 의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3 의 배수이다.
⑤ $2+7+3=12$ 가 3 의 배수이므로 273은 3 의 배수이다.

7. $20 \times \boxed{}$의 약수의 개수가 18개일 때, $\boxed{}$안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 4 ② 8 ③ 9 ④ 25 ⑤ 49

해설

(i) $\boxed{} = 2^a$ 일 때 $18 = (8+1) \times (1+1)$ 이므로

$\boxed{} = 2^6 = 64$

(ii) $\boxed{} \neq 2^a$ 일 때 $18 = (2+1) \times (a+1) \times (1+1)$

$a = 2$, 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

$\therefore$ (i), (ii)에서 가장 작은 자연수는 9

8. A는 15의 약수의 모임이고, B는 어떤 수의 약수의 모임일 때, A와 B의 공통된 수의 개수는 1개이다. 어떤 수가 될 수 있는 모든 자연수들의 합을 구하여라. (단, 어떤 수는 10 보다 작은 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$15 = 3 \times 5$

15 와 어떤 수의 공약수가 개수가 1 개, 즉 서로소이므로

어떤 수는 10 미만의 자연수 중 3 과 5 의 배수가 아닌 수이므로

1, 2, 4, 7, 8 이다.

따라서 어떤수가 될 수 있는 자연수들의 합은 22 이다.

9. 세 수 35 , 77 , 110 의 최소공배수를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 770

해설

$$\begin{aligned} 35 \ &= 5 \times 7 \\ 77 \ &= 7 \times 11 \\ \underline{110} \ &\underline{= 2 \times 5 \times 11} \\ 770 \ &= 2 \times 5 \times 7 \times 11 \end{aligned}$$

$\therefore$ 770

10. 세 자연수 a , b , c 의 최소공배수가 120 일 때, a , b , c 의 공배수 중 500 에 가장 가까운 수는?

① 360 ② 480 ③ 120 ④ 500 ⑤ 600

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로, 최소공배수인 120 의 배수 120 , 240 , 360 , 480 , 600 , $\cdots$ 중에서 500 에 가장 가까운 수는 480 이다.

11. 달리기 대회에서 기념품으로 수건 120 개, 스카프 144 개, 모자 156 개를 되도록 많은 참가자들에게 똑같이 나누어주려고 한다. 이 때, 한 명이 받게 되는 수건과 스카프, 모자의 개수로 옳은 것은?

① 5 개, 6 개, 9 개
② 6 개, 12 개, 18 개
③ 18 개, 12 개, 10 개
④ 12 개, 12 개, 12 개
⑤ 10 개, 12 개, 13 개

해설

참가자들의 수는
120, 144, 156 의 최대공약수이므로 12
한 명이 받게 되는 수건, 스카프, 모자의 수는 각각
$120 \div 12 = 10$, $144 \div 12 = 12$, $156 \div 12 = 13$

12. 가로의 길이가 120cm, 세로의 길이가 96cm, 높이가 60cm 인 직육면체를 일정한 크기로 잘라 가능한 한 가장 큰 정육면체로 나누려고 한다. 이때, 만들어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 A cm, 정육면체의 개수를 B 개 라 할 때, $A+B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 412

해설

만들어진 정육면체의 한 모서리의 길이는
120, 96, 60 의 최대공약수이므로
$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$96 = 2^5 \times 3$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
최대공약수는 $2^2 \times 3 = 12$
$\therefore$ 12cm
정육면체의 개수는
$(120 \div 12) \times (96 \div 12) \times (60 \div 12)$
$= 10 \times 8 \times 5 = 400$ (개)
$\therefore$ 400 개
따라서 $A+B = 12 + 400 = 412$

13. 세 변의 길이가 각각 66 m, 84 m, 78 m 인 삼각형 모양의 목장이 있다. 이 목장의 가장자리를 따라 일정한 간격으로 향나무를 심으려고 한다. 세 모퉁이는 반드시 향나무를 심어야 하며 나무의 개수는 될 수 있는 한 적게 하려고 할 때, 향나무를 최소한 몇 그루를 준비해야 하는지 고르면?

① 6 그루　② 18 그루　③ 24 그루
④ 38 그루　⑤ 41 그루

해설

66, 84, 78 의 최대공약수는 6 이므로
나무의 수는

$$\begin{aligned}(66 \div 6) + (84 \div 6) + (78 \div 6) &= 11 + 14 + 13 \\ &= 38 \text{ (그루)}\end{aligned}$$

14. 두 수 $\frac{35}{72}$, $\frac{91}{81}$ 의 어느 것에 곱하여도 항상 자연수가 되게 하는 분수가 있다. 이 중 가장 작은 분수를 주어진 두 수에 곱하여 만들어진 두 자연수의 합을 구한 것은?

① 145 ② 146 ③ 147 ④ 148 ⑤ 149

해설

$\frac{35}{72}$, $\frac{91}{81}$ 에 곱해야 하는 가장 작은 분수의 분모는 35와 91의 최대공약수인 7이고, 분자는 72와 81의 최소공배수인 648이다.

그러므로 $\frac{35}{72} \times \frac{648}{7} = 45$, $\frac{91}{81} \times \frac{648}{7} = 104$이다. 두 자연수의 합은 149이다.

15. 약수의 개수가 24 개이고, $2^a \times 3^b \times 5^c$ 으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라. (단 a, b, c 는 자연수)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 9 개

해설

$24 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 4 \times 3 = 4 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 \times 2$

$= 2 \times 6 \times 2 = 2 \times 3 \times 4 = 3 \times 4 \times 2 = 3 \times 2 \times 4$

$= 6 \times 2 \times 2$

이므로 자연수는 9 개이다.

16. 최대공약수가 $3 \times x$ 인 두 자연수의 공약수가 4 개일 때, x 의 값이 될 수 있는 한 자리의 자연수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 수의 최대공약수는 $3 \times x$,
공약수, 즉 최대공약수의 약수가 4 개이므로
최대공약수는 $a \times b$ (단, a, b 는 소수, $a \neq b$ 이다.) 또는 a^3 꼴이어야 한다.
따라서 x 가 될 수 있는 수는 2, 5, 7, 9 의 4 개이다.

17. 1000 이하의 자연수 중 $2^3\times3$과 2×3^2의 공배수의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$2^3\times3$ 과 2×3^2 의 최소공배수는 $2^3\times3^2=72$ 이다.

$\therefore\ 1000\div72=13\cdots64$

따라서 13개이다.

18. 진아와 태호는 각각 5 일, 3 일마다 한강시민공원으로 자전거를 타러 간다. 4 월 1 일 일요일에 함께 자전거를 타러 갔다면 다음에 두 번째로 함께 자전거를 타러 가는 날은 무슨 요일인지 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿요일

▷ 정답 : 화요일

해설

5 와 3 의 최소공배수는 15 이므로 두 사람은 15 일마다 함께 자전거를 탄다.
4 월 1 일 일요일 이후 두 번째로 함께 자전거를 타는 날은 30 일 후인 5 월 1 일 화요일이다.

19. 가로 12 cm, 세로 16 cm 인 직사각형 모양의 카드로 한 변의 길이가 2 m 보다 작은 정사각형을 만들 때, 만들 수 있는 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

▶ **답 :** ＿＿＿＿＿＿ cm

▷ **정답 :** 192 cm

해설

정사각형의 한 변의 길이는 12 와 16 의 공배수 중 200 보다 작은 자연수이다. 12 와 16 의 최소공배수는 48 이고, 48 의 배수 중 200 보다 작은 자연수는 48, 96, 144, 192 이므로 정사각형의 한 변의 길이는 192 cm 이다.

20. 어떤 자연수를 $5, 6, 8$ 로 나누면 모두 2 가 남는다고 한다. 이러한 수 중에서 가장 작은 수는?

① 120 ② 121 ③ 122 ④ 123 ⑤ 125

해설

어떤 자연수를 x 라 하면 $x-2$ 는 $5, 6, 8$ 의 공배수이다.
$5, 6, 8$ 의 최소공배수는 120 이므로 $x-2$ 는 $120, 240, 360, \cdots$ 이다.
$x = 122, 242, 362, \cdots$ 그러므로 가장 작은 수는 122

21. 자연수 x 에 대하여 $f(x)$ 는 x 를 8 로 나눈 나머지, $g(x)$ 는 x 를 9 로 나눈 나머지라고 정의할 때, $\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)\}+\{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)\}=671$ 을 만족하는 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 82

해설

$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4,\ f(5)=5,\ f(6)=6,\ f(7)=7,\ f(8)=0,\ f(9)=1,\ \cdots$

→ 연속되는 8 개의 수의 나머지의 합은 28 이다.

$\rightarrow f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=28\times12+1+2+3+4=346$

,

$g(1)=1,\ g(2)=2,\ g(3)=3,\ g(4)=4,\ g(5)=5,\ g(6)=6,\ g(7)=7,\ g(8)=8,\ g(9)=0,\ g(10)=1,\ \cdots$

→ 연속되는 9 개의 수의 합은 36 이다.

$\rightarrow \{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)\}+\{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)\}=671$

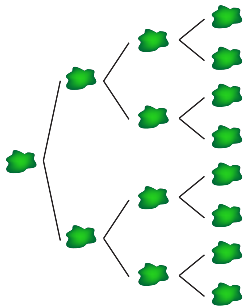
$\rightarrow 346+g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)=671$

$\rightarrow g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)=325=36\times9+1$

→ 연속되는 9 개의 수가 9 쌍 있고 뒤에 1 개의 수가 더 있다.

$\therefore n=9\times9+1=82$

22. 아메바는 둘로 분열하는 과정을 통해 번식을 한다. 아메바가 한 마리가 다음 그림과 같이 분열을 반복할 때, 전체 아메바(처음 한마리부터 차례로 더한 수)가 50 마리 이상이 되려면 아메바가 최소 몇 회 분열을 하여야 하는가? (단, 아메바는 각각 한 번씩만 분열하는 것으로 가정한다.)



① 4 회　　② 5 회　　③ 6 회

④ 7 회　　⑤ 8 회

해설

아메바 한 마리가 1 회 분열을 하면 2 마리가 생성되어 전체 아메바는 $1+2=3$ (마리)가 된다.
아메바는 각각 한 번씩만 분열하므로 2 회 분열에서는 새로 생성된 2 마리만 각자 분열을 하여 $2\times2=4$ (마리) 가 더 생성된다. 따라서 총 마리 수는 $1+2+2^2=7$ (마리)가 된다. 그 다음 3 회 분열을 하면 $1+2+2^2+2^3=15$ (마리)가 된다.
이런 방식으로 분열이 진행될 때마다의 총 마리수를 표로 정리하면 다음과 같다.

분열	총 마리 수(마리)
1회 분열	3
2회 분열	7
3회 분열	15
4회 분열	31
5회 분열	63
⋮	⋮

따라서 최소 5 회 분열을 해야 아메바의 총 마리 수가 50 마리 이상이 된다.

23. 다음 수 중 어떤 자연수의 제곱이 되지 않는 수는?

① $2 \times 3 \times 3$　② $2^2 \times 5^2$　③ 16

④ $2^2 \times 3^2 \times 5^2$　⑤ 81

해설

① 지수가 모두 짝수가 아니므로 자연수의 제곱이 되지 않는 수이다.

24. 75 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 수는?

① 2　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하기 위해 곱해 주어야 할 수 중 가장 작은 수는 3이다.

25. 50 보다 큰 두 자리의 자연수 A 와 21 의 최대공약수가 7 이다. 이러한 자연수 A 는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$50 < A < 99$ 이고 7 의 배수이다.

$$\begin{array}{r|cc} 7 & A & 21 \\ \hline & a & 3 \end{array}$$

그런데, a 는 3 의 배수가 되면 안되므로

A 는 50 보다 큰 7 의 배수 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98중 3 의 배수를 제외하면 5 개이다.

$\therefore$ 5 개