1. 함수 $y = 1 - \sqrt{2-x}$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$이다.

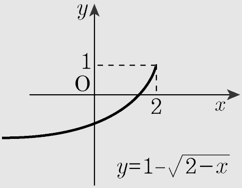
② 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$이다.

③ 그래프는 점 $(-2,\ -1)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

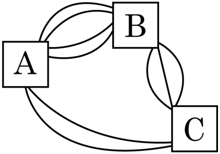
⑤ 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

해설



① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$이다.
② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$이다.
④ 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.

2. 아래쪽 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4가지, B 에서 C 로 가는 길은 3가지, A 에서 C 로 가는 길은 2가지이다. A 에서 C 를 왕복하는데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 48가지

해설

(i) $A-B-C-A$ 인 경우의 수는 $4\times3\times2=24$
(ii) $A-C-B-A$ 인 경우의 수는 $2\times3\times4=24$ 이상에서 구하는 방법의 수는
$24+24=48$

3. 10000 원짜리 지폐 3 장, 5000 원짜리 지폐 3 장, 1000 원짜리 지폐 4 장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 49 가지

해설

10000 원짜리 1 장으로 지불하는 금액과 5000 원짜리 2 장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000 원짜리 지폐 3 장을 5000 원짜리 지폐 6 장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000 원짜리 지폐 9 장, 1000 원짜리 지폐 4 장의 지불 방법의 수와 같다.

5000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 장의 10 가지

1000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

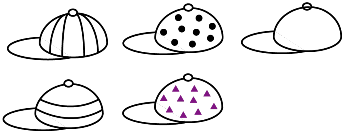
$0, 1, 2, 3, 4$ 장의 5 가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1 가지이므로

이를 제외하면

$10 \cdot 5 - 1 = 49$

4. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



① 33 ② 36 ③ 40 ④ 45 ⑤ 54

해설

n명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$F_n = (n-1)(F_{n-1} + F_{n-2})(n \geq 3)$,

$F_0 = 0, F_1 = 1$ 이므로

$F_3 = 2, F_4 = 9$

따라서 구하는 경우의 수는

$5F_4 = 5 \times 9 = 45$

5. n 권의 책이있다.(단, $n \geq 5$) 이 n 권 중에서 2 권의 책을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 그 총 방법의 수가 42 가지였다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 7$

해설

n 권에서 2 권을 뽑는 순열의 수는 ${}_nP_2$ 가지이므로

${}_nP_2 = 42$ 곧, $n(n-1) = 42 \quad \therefore \ (n+6)(n-7) = 0$

한편, $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$

6. 남학생 4 명과 여학생 2 명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

① 60 가지 ② 120 가지 ③ 180 가지

④ 240 가지 ⑤ 300 가지

해설

4 명의 남학생과 2 명의 여학생 중에서 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 5 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$ 이고, 묶음 안에서 여학생 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 2 가지이므로, 구하는 경우의 수는, $5! \times 2 = 240$ (가지) 이다.

7. 남자 3 명, 여자 4 명을 한 줄로 세울 때, 양 끝과 한가운데 여자가 서는 방법의 수는?

① 72 ② 144 ③ 288 ④ 576 ⑤ 684

해설

여자를 a 라 하면,

$a\boxed{}\boxed{}a\boxed{}\boxed{}a$ 와 같은 방법이어야 하므로 a 의 위치에 세울 여자를 선택하는 방법은 ${}_4P_3$ 이고, $\boxed{}$의 위치에 세울 사람(여자 1명, 남자 3명)을 선택 하는 방법은 $4!$ 이다.

따라서, 구하는 방법의 수는

${}_4P_3 \times 4! = 24 \times 24 = 576$ 이다.

8. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 세 가지 숫자를 사용하여 만든 세 자리의 자연수 중 5의 배수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

(i) 1의 자리가 0인 경우 : 100의 자리에 1, 2, 3, 4, 5의 5가지가 올 수 있고, 10의 자 리에는 100의 자리의 수를 제외한 4가지가 올 수 있다.

$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(가지)

(ii) 1의 자리가 5인 경우 : 100의 자리에 1, 2, 3, 4의 4가지가 올 수 있고, 10의 자리 에는 100의 자리의 수를 제외한 3가지와 0의 4가지가 올 수 있다.

$\therefore\ 4 \times 4 = 16$(가지)

(i), (ii)에서 $20 + 16 = 36$(개)

9. '*korea*' 의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 적어도 한 쪽 끝이 자음인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 84 개

해설

전체 경우의 수에서 양 쪽 끝이 모두 모음인 경우를 제외한다.

$5! - {}_3P_2 \times 3! = 84$

10. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 이 적혀 있는 7 개의 카드 중에서 서로 다른 5 개의 카드를 뽑아 나열한다. 이 때, 위의 그림의 예와 같이 첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이 면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상이 되도록 나열하는 방법의 수는?

① 120 ② 180 ③ 240 ④ 300 ⑤ 360

해설

첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상인 경우는
$1-7, 2-6, 3-5, 5-3$ 의 4가지이다.
이 4가지 경우에 대하여 각각 중앙에 남은 세 자리에 5개의 수 중에서
3개를 택하여 나열하는 방법의수는
${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는 $4 \times 60 = 240$ (가지)

11. 세 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \rightarrow \sim q$ ② $q \rightarrow p$ ③ $q \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$ ⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$

$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.

$\therefore$ 대우 : $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

12. 두 조건 $p : |x-k| \le 1$, $q : -7 \le x \le 3$에서 명제 $p \to q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12 ② -4 ③ 8 ④ 4 ⑤ 12

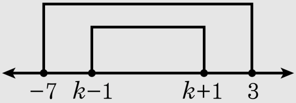
해설

$p : |x-k| \le 1$에서 $-1 \le x-k \le 1$

$\therefore k-1 \le x \le k+1 \cdots$ ㉠

$p \to q$가 참이면 ㉠이 $q : -7 \le x \le 3$에 포함되어야 한다.

수직선에 나타내면



$k-1 \ge -7 \therefore k \ge -6$

$k+1 \le 3 \therefore k \le 2$

따라서 k의 최솟값은 -6, k의 최댓값은 2 이다.

$\therefore -6+2=-4$

13. 집합 A, B, C에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B)$, $q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A$, $q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A$, $q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A$, $q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B$, $q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \;\Leftarrow\; A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \;\; \subset (B \cap C)$

$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \;\Leftrightarrow\; A \subset (B \cup C)$

$A \subset (B \cap C) \;\Rightarrow\; A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \;\Leftrightarrow\; (B \cap C) \subset A$

$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \;\Leftrightarrow\; (B \cup C) \subset A$

$(B \cap C) \subset A \;\Leftarrow\; (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \;\Leftrightarrow\; B \subset A$

$B \subset A \;\Leftarrow\; B = \varnothing$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$

$q : A \cup (B - A) = B \;\Leftrightarrow\; (A \cup B) = B$

$\Leftrightarrow\; A \subset B \; \therefore \; P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

14. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x \cdots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$

(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)

㉠, ㉡을 대입하면

$2(6-x^2) \geq (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \leq 0$

$(3x-2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \dfrac{2}{3} \leq x \leq 2$

따라서 $M=2,\ m=\dfrac{2}{3}$ 이므로 $\dfrac{M}{m}=3$

15. x, y가 유리수일 때, $[x,\ y] = \sqrt{2}x + y$로 정의하자. 유리수 a, b가 $[2a,\ 2b] + 1 = [b,\ a] - 2$를 만족할 때, $a + b$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$[2a,\ 2b] + 1 = \sqrt{2}(2a) + 2b + 1$

$[b,\ a] - 2 = \sqrt{2}b + a - 2$

$\therefore\ (2b+1) + 2a\sqrt{2} = (a-2) + b\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2b + 1 = a - 2 \\ 2a = b \end{cases}$ 에서

$a = -1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = -1 - 2 = -3$

16. a, b, c, d, e, f 의 여섯 문자로 만든 순열 중 모음의 순서가 알파벳의 순서와 같은 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 360 개

해설

모음 a 와 e 의 순서는 항상 a 가 먼저 오는 경우로 고정되어 있으므로,

a, e 를 a, a 로 보면

a, a, b, c, d, f 로 만드는 순열의 수는

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ (개)}$$

17. 신입 직원 오리엔테이션에 참가한 남녀 직원 12 명이 있다. 서로의 친분을 위해서 게임을 하는데 3 명의 대표가 필요하였다. 이 때, 적어도 한 명의 여자 직원이 뽑히는 경우의 수가 200 가지라고 할 때, 남자 직원의 수는 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 명

▷ 정답 : 6 명

해설

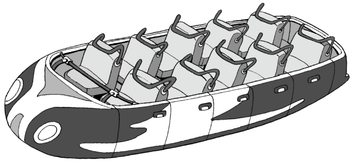
전체에서 3 명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

이 중에서 남학생 n 명에서 3 명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_3$ 이다.

따라서 $220 -_n C_3 = 200$ 을 풀면 $n = 6$ 이다.

18. 남학생 2 명과 여학생 2 명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2 개의 의자가 있고 모두 5 줄로 되어 있다. 남학생 1 명과 여학생 1 명이 짝을 지어 2 명씩 같은 줄에 앉을 때, 4 명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하여라.



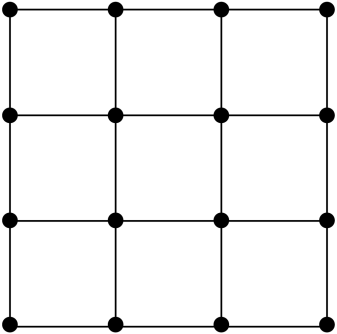
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 80 가지

해설

남학생을 A, B 라 하고, 여학생을 a, b 라 하면
짝을 이루는 방법은 (Aa, Bb), (Ab, Ba) 두 가지가
있다. 이때, 5 줄 중 2 줄에 앉아야 하고 각 줄에서
남학생과 여학생이 자리를 바꿀 수 있으므로
$2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times 2 \times 2 = 80$

19. 그림과 같이 정사각형 모양으로 16개의 점이 있을 때, 이 중 네 점을 연결하여 만들 수 있는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는?



① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

해설

가로줄에서 2 개, 세로줄에서 2 개를 선택하면 직사각형의 수가 되고 여기서 정사각형의 수 (14)를 빼준다 $\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_4C_2 - 14 = 22$

20. 어느 학급의 키가 큰 순위별로 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E 를 불러서 이들 다섯 명에게 키의 순위를 물었더니 다음 표와 같이 대답하였다. 이들이 모두 두 사람의 순위를 대답했지만 두 사람의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 이들의 대답으로 미루어 실제로 키가 제일 큰 사람은?

	A	B	C	D	E
1		B			A
2	D	C		D	
3	A		C		
4				E	E
5			B		

① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

문제에 주어진 표에서 각 열마다 하나는 옳고 하나는 틀리므로, 만일 A 열에서 D 가 2 위라면 D 열에서 E 는 4 위가 아니다. ⇒ E 열에서 A 가 1 위 ⇒ B 열에서 C 가 2 위
따라서 D 와 C 가 동시에 2 위가 되어 모순이다.
따라서 A 열에서 D 는 2 위가 아니므로 A 가 3 위이다. ⇒ C 열에서 B 가 5 위 ⇒ B 열에서 C 가 2 위 ⇒ D 열에서 E 가 4 위
따라서 A, B, C, E 는 각각 3 위, 5 위, 2 위, 4 위이므로 나머지 D가 1위이다.

21. a, b가 양의 상수이고, x, y가 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 만족하면서 변할 때, $x+y$의 최댓값은?

① a^2 ② b^2 ③ $\sqrt{a^2+b^2}$

④ a^2+b^2 ⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식

$(a^2+b^2)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\geq(x+y)^2$은 항상 성립하므로

$a^2+b^2\geq(x+y)^2\cdots\cdots①$

$\therefore x+y\leq\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots②$

①의 등호가 성립할 조건은

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이고 $\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{y}{b^2}\cdots\cdots③$

또, ③의 등호는 $x+y\geq 0$일 때, 성립하므로

③을 풀면

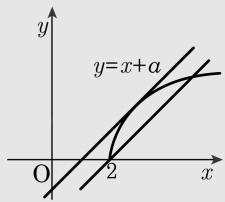
$x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$이고,

$x+y$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이다.

22. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x + a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a 값의 범위를 정하면?

① $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ② $-2 \le a < -\frac{3}{2}$ ③ $a < -\frac{3}{2}$
④ $a \le -\frac{3}{2}$ ⑤ $a > -\frac{3}{2}$

해설



그림에서 직선이 그래프와 두점에서 만나는 것은
직선 $y = x + a$ 가 $(2,\ 0)$ 을 지날 때부터 직선이 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 접하기 전까지이다.

i) $y = x + a$ 에 $(2,\ 0)$ 을 대입하면 $a = -2$

ii) $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x + a$ 가 접하기 위해서는 두 식을 연립한 식의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$\sqrt{2x-4} = x + a$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2x(a-1) + a^2 + 4 = 0$

$\frac{\text{D}}{4} = (a-1)^2 - a^2 - 4 = 0$

$-2a - 3 > 0$, $a < -\frac{3}{2}$

i) , ii) 로 부터 $-2 \le a < -\frac{3}{2}$