

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^4 - 16 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

$$\therefore \text{모든 해의 합은 } (-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$$

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

3. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $-3, 1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

- ① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근은 $1 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (-3)(1 - \sqrt{2}) + (-3)(1 + \sqrt{2}) = -7$$

$$b = -(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})(-3) = -3$$

$$\therefore a + b = -10$$

4. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$

② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$

③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$

④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면

다른 한 근은 $1-i$ 이다.

$$\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

주어진 조건에 맞는 방정식:

$$(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$$

$\therefore$ ①이 조건에 맞다

5. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

6. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t(t - 2) - 3 = 0,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ t = 3, \text{ 즉 } x^2 - 2x = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$(ii) \ t = -1, \text{ 즉 } x^2 - 2x = -1 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ (중근)}$$

$$\text{따라서, } -1 \times 3 \times 1 = -3$$

7. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.

주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

8. 방정식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ 의 값을 구하면?

① 7

② 11

③ 15

④ 19

⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -1$$

$x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ 이다. $x = 2$ 를 대입하면 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = 2^3 - 2^2(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 \times 3 + 1 = 8 + 8 - 6 + 1 = 11$

9. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 a , 모든 허근의 곱을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5

② 3

③ $\frac{3}{2}$

④ -2

⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을
 x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$$

$$\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

$$\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$ 은 허근을 갖고,

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 실근을 가지므로

실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$ 이다.

$$\therefore a + b = 4$$

10. x 에 관한 삼차방정식 $kx^3 + (1-2k)x^2 + (k-2)x - 2k = 0$ 의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k 의 범위를 구하면?

① $0 < k \leq \frac{1}{2}$

② $0 < k \leq 1$

③ $-\frac{1}{2} < k \leq 0$

④ $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{1}{2}$

⑤ $0 < |k| \leq \frac{1}{2}$

해설

준식 = $(x-2)(kx^2 + x + k) = 0$ 에서
 $kx^2 + x + k = 0$ 이 실근이어야하므로

$$D = 1 - 4k^2 \geq 0,$$

$$k \neq 0 \text{ 이므로 } 0 < |k| \leq \frac{1}{2}$$