

1. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$

② $-\frac{5}{3}$

③ 0

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$$

$$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$$p = -\frac{2}{3}, q = -5$$

$$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$$

2. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

최댓값 $m = 1$

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{3}(x + 3)^2$$

최솟값 $n = 0$

$$\therefore mn = 1 \times 0 = 0$$

3. 이차함수 $y = -2 + 3x - x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$) 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$

② $-\frac{16}{3}$

③ $-\frac{3}{4}$

④ $\frac{7}{4}$

⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x 의 값의 범위 $-1 \leq x \leq 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6 을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

4. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

5. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$$

$$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$$

따라서 m 의 최댓값은 1이다.

6. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면

$$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로

$$t \geq 2 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은

$t = 2$ 일 때 1이다.

7. x 가 실수일 때 $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$$\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 1} = k \text{라 두면}$$

$$x^2 - x + 4 = k(x^2 + x + 1)$$

$$(k - 1)x^2 + (k + 1)x + k - 4 = 0$$

x 가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D = (k + 1)^2 - 4(k - 1)(k - 4) \geq 0$

$$3k^2 - 22k + 15 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11 - 2\sqrt{19}}{3} \leq k \leq \frac{11 + 2\sqrt{19}}{3}$$

k 는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0. \times \times \leq k \leq 6. \times \times$ 에서

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 6개이다.

8. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$ m

② 8m

③ $\frac{17}{2}$ m

④ 3m

⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\text{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\text{m}$ 라 하면

$$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$ m 일

때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}$ m^2 을 가진다.

9. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

- ① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다

해설

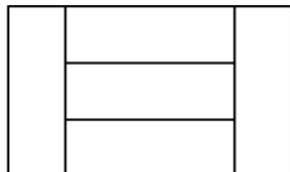
$$y = 50t - 5t^2$$

$$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25)$$

$$= -5(t - 5)^2 + 125$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

10. 다음 그림에서 직사각형의 변을 제외한 직사각형 내부의 선분의 길이의 총합이 48 이고, 내부의 5 개의 직사각형의 넓이는 모두 같다. 큰 직사각형의 넓이가 최대일 때의 큰 직사각형의 가로의 길이를 y , 세로의 길이를 x 라 할 때, xy 의 값을 구하여라.

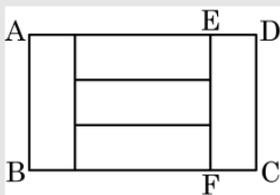


▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

그림에서



$$\square CDEF = \frac{1}{5} \square ABCD \text{ 이므로}$$

$$\overline{DE} = \frac{1}{5}y$$

직사각형 내부 선분의 길이의 합이 48 이므로

$$2x + \frac{6}{5}y = 48,$$

$$\therefore y = -\frac{5}{3}x + 40$$

직사각형 ABCD 의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= xy = x \left(-\frac{5}{3}x + 40 \right) \\ &= -\frac{5}{3}(x - 12)^2 + 240 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 12 \text{ 일 때, 큰 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 } y = \left(-\frac{5}{3} \right) \times 12 + 40 = 20$$

따라서 $xy = 240$ 이다.