1. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$　② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$　③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$　⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

2. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -\frac{1}{2}$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$= 8 - 3 \times (-\frac{1}{2}) \times 2 = 11$$

3. 이차방정식 $x^2 - 10x + k = 0$의 두 근의 비가 $2 : 3$이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α라 하면
다른 한 근은 3α가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 10 & \cdots\cdots ① \\ 2\alpha \times 3\alpha = k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 풀면
$\alpha = 2,\ k = 6 \times 2^2 = 24$

4. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

5. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

6. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore \; a = -2$

7. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

8. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α, $\alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha = k - 1$을 ㉡에 대입하면,
$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$
$\therefore\ k = -2$

9. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b를 잘못 본 경우

a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은

$$\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{c}{a}\quad \therefore\ c=2a$$

(ii) c를 잘못 본 경우

a와 b는 옳으므로 두 근의 합은

$$-1+4=3=-\frac{b}{a}\quad \therefore\ b=-3a$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식은

$ax^2-3ax+2a=0$

$a\neq 0$이므로 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 근의 합은 3이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+4xy+y^2=10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, α^2, β^2을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2-5x+3=0$

② $x^2+5x-3=0$

③ $x^2-5x+1=0$

④ $x^2+6x-1=0$

⑤ $x^2-6x+1=0$

해설

$\begin{cases} \alpha-\beta=2 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

㉠의 양변을 제곱하면

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4 \quad \cdots ㉢$

㉡ − ㉢에서

$\alpha\beta=1 \quad \cdots ㉣$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha^2\beta^2=1$

$\therefore$ α^2, β^2을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$