1. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ 0　　④ -2　　⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k+2) = 0$

$\dfrac{D}{4} = (-1)^3 - (k+2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \ k = -1$

2. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k < -2$　　② $-1 < k < 0$　　③ $-1 < k < 4$

④ $k < 5$　　⑤ $0 < k < 5$

해설

$x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$\frac{D}{4} = 9 - 2k + 1 > 0 \quad \therefore 2k < 10 \quad \therefore k < 5$

3. 이차방정식 $5x^2-6x+a-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$D' = 9-5(a-5) = -5a+34 < 0$

$\therefore a > \dfrac{34}{5}$

4. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

5. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a=0$ 일 때 : $x=\dfrac{a+2}{2}$

(ii) $a\neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D'=1+a(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

6. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근 ② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근 ④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$

$=a^2-2a+1+a^2+a$

$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\frac{1}{2}a\right)+1$

$=2\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)+1-\frac{1}{8}$

$=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

7. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $mx^2+2(a-b-m)x-a+m+1=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 a, b의 값은?

① $a=-1,\ b=0$
② $a=-1,\ b=-1$
③ $a=0,\ b=1$
④ $a=1,\ b=1$
⑤ $a=1,\ b=2$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때,
$m \neq 0$이고, 중근을 가지려면
$D=0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a-b-m)^2-m(-a+m+1)$$

$$a^2+b^2-2ab+2bm-am-m=0$$

이 때, 이 등식이 m의 값에 관계없이
항상 성립해야 하므로
m에 대하여 정리하면

$$(2b-a-1)m+(a-b)^2=0$$

$$2b-a-1=0,\ (a-b)^2=0$$

두 식을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=1$

8. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2 + 2cx + a - b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a = b$인 이등변삼각형
③ $b = c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

따라서, $a + b > 0$이므로 준식은 이차식이다.

준식이 완전제곱식이 되려면

판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0$$

정리하면, $c^2 - a^2 + b^2 = 0$

$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2$

따라서, a가 빗변인 직각삼각형

9. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$가 $x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$

$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2$가

$x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$

$\quad = y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$

$\quad = (1-4a)y^2 - 2y + 9$에서

$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$

$\therefore\ 1 - 9 + 36a = 0$

$\therefore\ a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

10. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4}=a^2-bc,$$

$$\frac{D_2}{4}=b^2-ca,$$

$$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$$ 라 하면

$$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\ge 0$$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.