

1. 다항식 $x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 일차식 $x - 2$ 로 나눌 때의 나머지는?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 6 \\ &= (x - 2)Q(x) + R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 \\ &= 8 - 8 + 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore R = 4$$

2. 다항식 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 의 값은?

① 8

② 10

③ 12

④ 16

⑤ 20

해설

$$f(2) = 24 - 16 + 4 - k = 0$$

$$\therefore k = 12$$

3. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
 $f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

4. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

- ① 3
- ② -4
- ③ 2
- ④ 8
- ⑤ 6

해설

$3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$
 $= (x - 1) \{ a(x - 1) + b \} + c$

1		3	2	1	
			3	5	
1		3	5	6	← c
			3		
		3	8		← c
		↑			
		a			

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$
 $3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + 6$
 $\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$
 $\rightarrow (x - 1)(3x + 5) = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$
 $\rightarrow$ 양변을 $x - 1$ 로 나누면
 $3x + 5 = a(x - 1) + b = ax - a + b$
 $\therefore a = 3, b = 8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

5. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x) + 2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

6. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ = (x + 2)(x - 1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

7. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

- ① $a=3$
- ② $b=2$
- ③ $c=1$
- ④ $d=4$
- ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1, a=3, b=2, c=1, d=4$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

8. x 에 대한 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 8$ 은 $(x + 2)^2$ 으로 나누어 떨어지고, $1 - f(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어 떨어질 때, $f(x)$ 의 상수항은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$f(x) + 8 = (x + 2)^2(ax + b) \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - f(x) = (x^2 - 1)Q(x) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}\text{에서 } f(1) = 1, f(-1) = 1$$

그러므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$1 + 8 = 9(a + b) \cdots \textcircled{3}$$

$$1 + 8 = -a + b \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4}\text{에서 } a = -4, b = 5$$

$$\therefore f(x) = (x + 2)^2(-4x + 5) - 8$$

$$\therefore \text{상수항은 } f(0) = 2^2 \cdot 5 - 8 = 12$$

9. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

10. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(a+b)$ 는? (단, a, b 는 서로 다른 실수)

- ① $af(a) + bf(b)$ ② $-af(a) + bf(b)$
 ③ $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$ ④ $\frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$
 ⑤ $bf(a) - af(b)$

해설

$$\begin{aligned}
 R(x) &= cx + d \text{라 하면} \\
 f(a) &= ac + d, f(b) = bc + d \\
 \therefore f(a) - f(b) &= (a - b)c \\
 \therefore c &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \\
 \text{또 } f(a) + f(b) &= (a + b)c + 2d \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + 2d \\
 \therefore 2d &= f(a) + f(b) - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{(a - b) \{f(a) + f(b)\}}{a - b} - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{1}{a - b} [af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - \{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b)\}] \\
 &= \frac{1}{a - b} \{af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - af(a) + af(b) - bf(a) + bf(b)\} \\
 &= \frac{2af(b) - 2bf(a)}{a - b} \\
 \therefore d &= \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 \text{따라서 } R(a + b) &= (a + b)c + d \\
 &= (a + b) \times \frac{f(a) - f(b)}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b) + af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}
 \end{aligned}$$