1. 다항식 x^3-2x^2+5x-6을 일차식 $x-2$로 나눌 때의 나머지는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3-2x^2+5x-6 \\ &= (x-2)Q(x)+R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(2) &= 2^3-2\cdot 2^2+5\cdot 2-6 \\ &= 8-8+10-6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ R=4$

2. 다항식 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 의 값은?

① 8　② 10　③ 12　④ 16　⑤ 20

해설

$f(2) = 24 - 16 + 4 - k = 0$

$\therefore\ k = 12$

3. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$ ② $-x+3$ ③ $x-3$

④ $-x-3$ ⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 $2, 1$이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

4. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$= (x-1)\left\{a(x-1) + b\right\} + c$

1	3	2	1	
		3	5	
1	3	5	6	← c
		3		
	3	8	← c	
	↑			
	a			

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$

$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + 6$

$\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x-1)^2 + b(x-1)$

$\rightarrow (x-1)(3x+5) = a(x-1)^2 + b(x-1)$

$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$3x + 5 = a(x-1) + b = ax - a + b$

$\therefore\ a = 3,\ b = 8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

5. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

6. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$$
$$=(x+2)(x-1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$

$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

7. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$

④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

8. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠

$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡

㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$

그러므로 ㉠에서

$1+8=9(a+b)\cdots$㉢

$1+8=-a+b\cdots$㉣

㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$

$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$

$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

9. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, $a,\ b,\ c$는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

10. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$ ② $-af(a)+bf(b)$

③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$ ④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$

⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\{f(a)+f(b)\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-bf(a)+bf(b)\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$