1. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

2. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요　　② 충분

③ 필요충분　　④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

3. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.
㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)
㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$
$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$
$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$
$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때
$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로
$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

4. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\quad \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

5. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 를 $f(x) = 2x + 5$ 로 정의 할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$ 의 값은 얼마인가?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a,\ f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면
$f(a) = 1,\ f(b) = 5$
$f(x) = 2x + 5$ 이므로
$f(a) = 1$ 에서 $2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$
$f(b) = 5$ 에서 $2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$
$\therefore a + b = -2$

6. 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오거나 소수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 5 가지

해설
짝수의 눈 : 2, 4, 6 (3 가지)
소수의 눈 : 2, 3, 5 (3 가지)
짝수이면서 소수인 눈 : 2 (1 가지)
따라서 짝수 또는 소수의 눈이 나오는 경우의 수는
$3 + 3 - 1 = 5$ 이다.
$\therefore$ 5 가지

7. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.
(가) 1 바로 다음에는 3 이다.
(나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.
(다) 3 바로 다음에는 1 , 2 또는 3 이다.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 13가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13가지이다.

8. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 90 가지

해설

$_{10}P_2 = 90$

9. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $p \rightarrow \sim q, r \rightarrow q$가 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$　② $q \rightarrow r$　③ $\sim r \rightarrow q$

④ $r \rightarrow \sim p$　⑤ $q \rightarrow \sim r$

해설

$r \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim r, \sim p \rightarrow \sim q, \rightarrow q \rightarrow p$에서 $r \rightarrow g \rightarrow p$
$\Leftrightarrow r \rightarrow \sim p$

10. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

11. 함수 f가 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서

$x=0,\ y=0$ 을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=2f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

12. 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$\therefore$ $x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.
$\therefore a = 3$

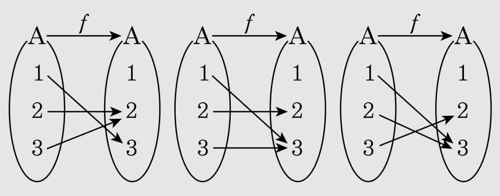
13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$ Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

14. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에서 X로의 일대일대응 중에서 $f(x) \neq x$를 만족시킬 때, $f(2) + f^{-1}(2)$의 값은 얼마인가?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

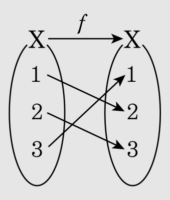
$f(x) \neq x$ 이므로 $f(1) = 2$ 또는 $f(1) = 3$이다.

(i) $f(1) = 2$ 이면

$f(3) \neq 3$ 이므로

$f(3) = 1,\ f(2) = 3$

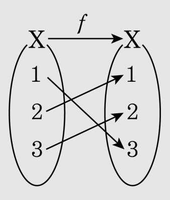
$\therefore\ f(2) + f^{-1}(2) = 3 + 1 = 4$



(ii) $f(1) = 3$이면 $f(2) \neq 2$ 이므로

$f(2) = 1,\ f(3) = 2$

$\therefore\ f(2) + f^{-1}(2) = 1 + 3 = 4$



(i) , (ii) 에서

$f(2) + f^{-1}(2) = 4$

15. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$을 간단히 하면?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$

$=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdots\frac{8\cdot10}{9^2}\cdot\frac{9\cdot11}{10^2}$

$=\frac{1\cdot11}{2\cdot10}=\frac{11}{20}$

일반적으로

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

16. 다음은 양수 $x,\ y,\ z$가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$
$\therefore P^2\geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$　② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}$$
$$+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore\ P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because\ x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

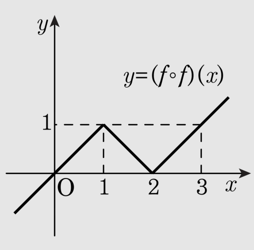
17. $0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x) = |x-1|$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax + b$의 실근의 개수는
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프와
직선 $y = ax + b$의 교점의 개수와 같다.
$f(x) = |x-1|$에서
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$
따라서 $0 \le x \le 2$에서
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x + 2$이어야 한다.



그런데, $b \neq 0$이므로 $y = -x + 2$
따라서 $a = -1$, $b = 2$이므로 $ab = -2$

18. $2x = t + \sqrt{t^2-1}$ 이고 $3y = t - \sqrt{t^2-1}$ 일 때, $x = 3$ 이면 y 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{36}$ ⑤ $\frac{1}{72}$

해설

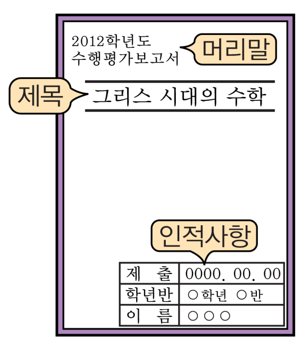
두 식을 곱하면

$6xy = (t + \sqrt{t^2-1})(t - \sqrt{t^2-1}) = t^2 - (t^2 - 1)$

$6xy = 1 \;\therefore\; y = \frac{1}{6x}$

$x = 3$ 이므로 $y = \frac{1}{18}$

19. 다음 그림은 어떤 학생이 작성한 수행평가 보고서의 표지이다.



구분	글꼴
머리말	중고딕, 견고딕, 굴림체
제목	중고딕, 견고딕, 굴림체, 신명조, 견명조, 바탕체
인적사항	신명조, 견명조, 바탕체

머리말, 제목, 인적사항에 서로 다른 글꼴을 표기할 때, 가능한 방법은 몇가지인지 구하여라.

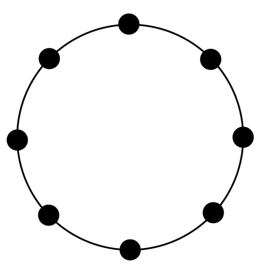
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 36 가지

해설

머리말과 인적사항의 글꼴들은 모두 다르므로 머리말의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 3 가지,
인적사항의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 3 가지이다.
제목의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 머리말, 인적사항의 글꼴을 제외한 4 가지이므로
전체 경우의 수는 $3 \times 3 \times 4 = 36$

20. 그림과 같이 원 위에 8 개의 점이 같은 간격으로 놓여 있을 때, 이 중에서 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는?



① 64　② 70　③ 72　④ 80　⑤ 96

해설

8 개의 점 중 4 개를 선택하는 방법과 같다.

$_8C_4 = 70$

21. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?

① $\sqrt{3}$

② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

'비둘기집의 원리'를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3\times3\times3 = 27$개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

대각선 길이 $= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다

22. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a^2 = b^2 + c^2,\ b + c \le ka$ 를 만족하는 양의 상수 k 의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b + c \le ka$ 에서 $b + c > 0$ 이므로
$(b+c)^2 \le k^2a^2,\quad (b+c)^2 \le k^2(b^2+c^2)$
그러므로 $(k^2-1)b^2 - 2bc + (k^2-1)c^2 \ge 0$
이 임의의 양수 $b,\ c$ 에 대하여 성립할 조건은
$k^2 - 1 > 0,\quad D/4 = c^2 - (k^2-1)^2c^2 \le 0$
두 식에서 $k > 0$ 이므로 $k \ge \sqrt{2}$
따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

23. 함수 $f(x)$가 임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$를 만족시킬 때, $f(1)\cdot f(2)$의 값은? (단, $f(0)=1$)

① 1 ② 4 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y) = 2x^2$, $f(x)=f(-x)$ 일 때

ⅰ) $x=1$, $y=0$ 을 대입

$f(1+0)+f(0-1)-2f(0)=2\times 1$ ($\because\ f(0)=1$)

$f(1)+f(-1)-2\times 1=2\times 1$

$2f(1)=4$ ($\because f(1)=f(-1)$) $\rightarrow f(1)=2$

ⅱ) $x=1$, $y=1$ 을 대입

$f(1+1)+f(1-1)-2f(1)=2\times 1$

$f(2)+f(0)-2\times 2=2$

$f(2)+1-4=2\ \rightarrow\ f(2)=5$

$\therefore\ f(1)\cdot f(2)=2\times 5=10$

24. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$를 $f(x)$로 나타내면 ?

① $\dfrac{2f(x)}{2f(x)-1}$ ② $\dfrac{2f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}$
④ $\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}$ ⑤ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$2x=\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}$

$f(2x)=f\left(\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}\right)=\dfrac{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}-1}$

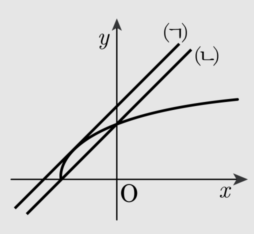
$=\dfrac{2f(x)}{2f(x)-f(x)+1}=\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}$

25. 직선 $y = x + k$가 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \le k < 2$　　② $k \le \frac{3}{2}$, $k > 2$　　③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$
④ $k \ge \frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{3}{2} < k < 2$

해설

직선이 ㉠, ㉡ 사이에 있을 때,
교점이 두개다.



㉠: 접할 때

$x + k = \sqrt{2x+3}$에서

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

$D' = (k-1)^2 - (k^2-3) = 0$

$k = 2$

㉡: 직선이 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지날 때

$0 = -\frac{3}{2} + k$에서 $k = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{3}{2} \le k < 2$