

1. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

2. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요

② 충분

③ 필요충분

④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

3. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$

㉣ $|x + y| \geq |x - y|$

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x > -1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)

㉢ $(|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $= 2(|xy| + xy) \geq 0$

$\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때

$|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로

$|x + y| < |x - y|$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

4. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $|x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ $|x + y| \geq |x - y|$

㉢ $|x - y| \geq |x| - |y|$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$

$\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$|1 + (-1)| = 0, |1 - (-1)| = 2$ 이므로

$|x + y| < |x - y|$

㉢ $|x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$

$\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

5. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = 2x + 5$ 로 정의할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a$, $f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면

$$f(a) = 1, f(b) = 5$$

$f(x) = 2x + 5$ 이므로

$$f(a) = 1 \text{ 에서 } 2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$$

$$f(b) = 5 \text{ 에서 } 2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore a + b = -2$$

6. 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오거나 소수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 5 가지

해설

짝수의 눈 : 2, 4, 6 (3 가지)

소수의 눈 : 2, 3, 5 (3 가지)

짝수이면서 소수인 눈 : 2 (1 가지)

따라서 짝수 또는 소수의 눈이 나오는 경우의 수는

$$3 + 3 - 1 = 5 \text{ 이다.}$$

∴ 5 가지

7. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.

(가) 1 바로 다음에는 3 이다.

(나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.

(다) 3 바로 다음에는 1, 2 또는 3 이다.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 13가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332, 333 이므로 13 가지이다.

8. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 90가지

해설

$${}_{10}P_2 = 90$$

9. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $p \rightarrow \sim q, r \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$

② $q \rightarrow r$

③ $\sim r \rightarrow q$

④ $r \rightarrow \sim p$

⑤ $q \rightarrow \sim r$

해설

$$r \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim r, \sim p \rightarrow \sim q, \rightarrow q \rightarrow p \text{에서 } r \rightarrow q \rightarrow p \\ \Leftrightarrow r \rightarrow \sim p$$

10. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

11. 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족할 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서

$x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 2f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

12. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

13. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

I. $f(1) = 3$

II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는

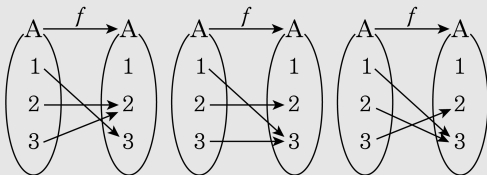
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고

$f(2), f(3)$ 의 값이 동시에

3이 되어서는 안되며 어떤 원소도

1에 대응해서는 안된다.

따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

14. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 X 로의 일대일 대응 중에서 $f(x) \neq x$ 를 만족시킬 때, $f(2) + f^{-1}(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

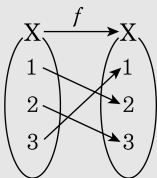
$f(x) \neq x$ 이므로 $f(1) = 2$ 또는 $f(1) = 3$ 이다.

(i) $f(1) = 2$ 이면

$f(3) \neq 3$ 이므로

$f(3) = 1, f(2) = 3$

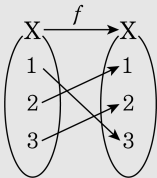
$\therefore f(2) + f^{-1}(2) = 3 + 1 = 4$



(ii) $f(1) = 3$ 이면 $f(2) \neq 2$ 이므로

$f(2) = 1, f(3) = 2$

$\therefore f(2) + f^{-1}(2) = 1 + 3 = 4$



(i) , (ii) 에서

$f(2) + f^{-1}(2) = 4$

15. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ 을 간단히 하면?

① $\frac{5}{12}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{11}{20}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \\ &= \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

일반적으로

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

16. 다음은 양수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때, $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 x^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\
 \therefore P^2 &\geq (\text{가})
 \end{aligned}$$

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
 등호는 $x = y = z =$ (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
 ④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2 = \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

조건에서 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 x^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} \right) + 2 \\
 &\geq \sqrt{\frac{y^2 z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2 x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2 x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2 y^2}{z^2}} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2}} + 2 \\
 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3)
 \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x = y = z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ 일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로 $x = y = z$ 이면 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

17. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는
 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

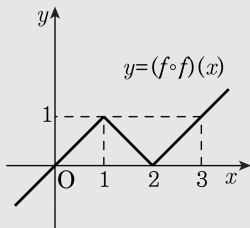
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1$, $b = 2$ 이므로 $ab = -2$



18. $2x = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 이고 $3y = t - \sqrt{t^2 - 1}$ 일 때, $x = 3$ 이면 y 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{9}$

③ $\frac{1}{18}$

④ $\frac{1}{36}$

⑤ $\frac{1}{72}$

해설

두 식을 곱하면

$$6xy = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t - \sqrt{t^2 - 1}) = t^2 - (t^2 - 1)$$

$$6xy = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{6x}$$

$$x = 3 \text{ 이므로 } y = \frac{1}{18}$$

19. 다음 그림은 어떤 학생이 작성한 수행평가 보고서의 표지이다.

2012학년도
수행평가보고서

머리말

제목

그리스 시대의 수학

인적사항

제출	0000. 00. 00
학년반	○학년 ○반
이름	○○○

구분	글꼴
머리말	중고딕, 견고딕, 굴림체
제목	중고딕, 견고딕, 굴림체, 신명조, 견명조, 바탕체
인적사항	신명조, 견명조, 바탕체

머리말, 제목, 인적사항에 서로 다른 글꼴을 표기할 때, 가능한 방법은 몇가지인지 구하여라.

▶ 답 : 36 가지

▶ 정답 : 36 가지

해설

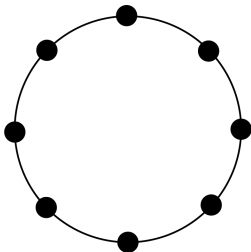
머리말과 인적사항의 글꼴들은 모두 다르므로 머리말의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 3 가지,

인적사항의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 3 가지이다.

제목의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 머리말, 인적사항의 글꼴을 제외한 4 가지이므로

전체 경우의 수는 $3 \times 3 \times 4 = 36$

20. 그림과 같이 원 위에 8개의 점이 같은 간격으로 놓여 있을 때, 이 중에서 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는?



① 64

② 70

③ 72

④ 80

⑤ 96

해설

8개의 점 중 4 개를 선택하는 방법과 같다.

$${}_8C_4 = 70$$

21. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?

- ① $\sqrt{3}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.
- ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

‘비둘기집의 원리’를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을 때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해 보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

$$\text{대각선 길이} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다

22. $a > 0, b > 0, c > 0, a^2 = b^2 + c^2, b + c \leq ka$ 를 만족하는 양의 상수 k 의 최솟값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ $\sqrt{6}$

⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b + c \leq ka$ 에서 $b + c > 0$ 이므로

$$(b + c)^2 \leq k^2 a^2, \quad (b + c)^2 \leq k^2 (b^2 + c^2)$$

$$\text{그러므로 } (k^2 - 1)b^2 - 2bc + (k^2 - 1)c^2 \geq 0$$

이 임의의 양수 b, c 에 대하여 성립할 조건은

$$k^2 - 1 > 0, \quad D/4 = c^2 - (k^2 - 1)^2 c^2 \leq 0$$

두 식에서 $k > 0$ 이므로 $k \geq \sqrt{2}$

따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

23. 함수 $f(x)$ 가 임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y) + f(y-x) - 2f(y) = 2x^2$, $f(x) = f(-x)$ 를 만족시킬 때, $f(1) \cdot f(2)$ 의 값은? (단, $f(0) = 1$)

① 1

② 4

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

임의의 x, y 에 대하여 $f(x+y) + f(y-x) - 2f(y) = 2x^2$,
 $f(x) = f(-x)$ 일 때

i) $x = 1, y = 0$ 을 대입

$$f(1+0) + f(0-1) - 2f(0) = 2 \times 1 \quad (\because f(0) = 1)$$

$$f(1) + f(-1) - 2 \times 1 = 2 \times 1$$

$$2f(1) = 4 \quad (\because f(1) = f(-1)) \rightarrow f(1) = 2$$

ii) $x = 1, y = 1$ 을 대입

$$f(1+1) + f(1-1) - 2f(1) = 2 \times 1$$

$$f(2) + f(0) - 2 \times 2 = 2$$

$$f(2) + 1 - 4 = 2 \rightarrow f(2) = 5$$

$$\therefore f(1) \cdot f(2) = 2 \times 5 = 10$$

24. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내면 ?

① $\frac{2f(x)}{2f(x)-1}$

② $\frac{2f(x)}{2f(x)+1}$

③ $\frac{2f(x)}{f(x)-1}$

④ $\frac{2f(x)}{f(x)+1}$

⑤ $\frac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ 에서 } x = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

$$2x = \frac{2f(x)}{f(x)-1}$$

$$f(2x) = f\left(\frac{2f(x)}{f(x)-1}\right) = \frac{\frac{2f(x)}{f(x)-1}}{\frac{2f(x)}{f(x)-1} - 1}$$

$$= \frac{2f(x)}{2f(x) - f(x) + 1} = \frac{2f(x)}{f(x) + 1}$$

25. 직선 $y = x + k$ 가 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 값의 범위는?

㉠ $\frac{3}{2} \leq k < 2$

㉡ $k \leq \frac{3}{2}, k > 2$

㉢ $\frac{3}{2} \leq k \leq 2$

㉣ $k \geq \frac{3}{2}$

㉤ $\frac{3}{2} < k < 2$

해설

직선이 ㉠, ㉣ 사이에 있을 때,
교점이 두개다.

㉠: 접할 때

$$x + k = \sqrt{2x+3} \text{에서}$$

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$$

$$D' = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = 0$$

$$k = 2$$

㉣: 직선이 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지날 때

$$0 = -\frac{3}{2} + k \text{에서 } k = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq k < 2$$

