1. $1 \le x \le 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1}+4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\sqrt{3x+1}+4 = -\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+4$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1}+4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1}+4 = 0$

$\therefore\ a-b = 2-0 = 2$

2. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿＿＿ 가지

▷ 정답 : 90 가지

해설

${}_{10}P_2 = 90$

3. 0, 1, 2로 중복을 허락하여 만들 수 있는 다섯 자리의 정수의 개수는?

① 86가지 ② 98가지 ③ 132가지
④ 162가지 ⑤ 216가지

해설
첫 자리에 올 수 있는 숫자는 2가지이고 나머지는모두 3가지이다.
$\therefore\ 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 162$가지

4. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 빨강을 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 20가지

해설

${}_6C_3 = 20$

5. 집합 $X = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서 정의된 함수 $f(x) = |x| + 1$의 치역을 구하면?

① $\{1\}$　　② $\{1,\ 2\}$　　③ $\{2,\ 3\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3\}$　　⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

해설

$x = -2,\ 2$일 때 $f(x) = 3$

$x = -1,\ 1$일 때 $f(x) = 2$

$x = 0$일 때 $f(x) = 1$

따라서 f의 치역은 $\{1, 2, 3\}$

6. 1부터 800까지의 자연수 중에서 800과 서로소인 수의 개수를 구하면?

① 310개　② 320개　③ 330개
④ 340개　⑤ 350개

해설

$800 = 2^5 \times 5^2$ 으로 소인수분해가 된다.
800과 서로소가 되려면 2나 5를 인수로 가져서는 아니되므로 1부터 800까지의 수 중에서 2 또는 5의 배수의 개수를 계산하여 여사건을 이용하면 된다.
2의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라 하면

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 400 + 160 - 80 = 480 \end{aligned}$$

따라서 800과 서로 소인수의 개수는
$800 - 480 = 320$(개)이다.

7. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)$
$=7\times40\times6=1680$

8. 어떤 등산모임에서는 다음과 같이 강원도, 충청도, 전라도 세 지역의 6개의 산을 6주에 걸쳐 주말마다 하나씩 등산할 계획을 세우고 있다.

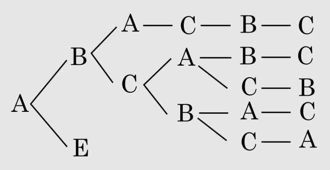
지역	산
강원도	설악산, 오대산
충청도	계룡산, 소백산
전라도	내장산, 지리산

같은 지역의 산끼리 연속적으로 등산하지 않도록 계획을 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

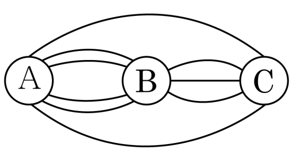
① 36 ② 48 ③ 60 ④ 120 ⑤ 240

해설

세 지역 강원도, 충청도, 전라도를 각각 A, B, C 라 하면 1주차에 A 지역 산을 등산하고, 2주차에 B 지역 산을 등산하는 경우는 다음 수형도와 같이 5가지가 있고, 같은 지역의 산끼리 위치를 바꾸는 방법은 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)
한편, 1주차에 A 지역, 2주차에 C 지역의 산을 등산하는 경우도 같으므로 1주차에 A 지역의 산을 등산하는 방법의 수는
$5 \times 8 \times 2 = 80$ (가지)
또한, 1주차에 B, C 지역의 산을 등산하는 경우의 수도 같다.
따라서 구하는 방법의 수는
$80 \times 3 = 240$ (가지)



9. 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4 가지, B 에서 C 로 가는 길은 3 가지, A 에서 C 로 가는 길은 2 가지이다. A 에서 C 를 왕복하는 데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수는?



① 24　② 48　③ 56　④ 72　⑤ 96

해설

(1) $A \to C \to B \to A$

$: \ 2 \times 3 \times 4 = 24$

(1) $A \to B \to C \to A$

$: \ 4 \times 3 \times 2 = 24$

$\therefore 24 + 24 = 48$

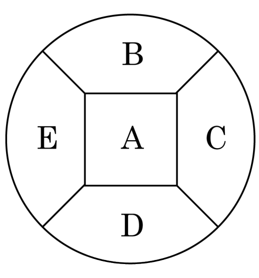
10. 100 원, 300 원, 500 원짜리 3 종류의 사탕이 있다. 이 사탕을 1000 원어치 사는 방법의 수는?

① 7 개 ② 10 개 ③ 13 개 ④ 15 개 ⑤ 17 개

해설

500 원을 기준으로 생각한다.
100 원을 A, 300 원을 B라 하면,
(1) 500 원 0 개 :
$(A, B) = (1, 3),\ (4, 2),\ (7, 1),\ (10, 0)$
(2) 500 원 1 개 : $(A, B) = (2, 1),\ (5, 0)$
(3) 500 원 2 개 : $(A, B) = (0, 0)$
$\therefore$ 총 7 개

11. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 5 가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



① 160 ② 270 ③ 360 ④ 420 ⑤ 540

해설

A 를 먼저 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 5 가지이다. 그 다음 B 를 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 4 가지, C 를 칠할 수 있는 방법은 3 가지이다.

(i) B 와 D 가 다른 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 A, B, C 에 칠한 색을 제외한 2 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 A, B, D 에 칠한 색을 제외한 2 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ (가지)

(ii) B 와 D 가 같은 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 B 와 동일하므로 1 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 $A, B(= D)$ 에 칠한 색을 제외한 3 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$ (가지)

따라서 (i) (ii) 에서 $240 + 180 = 420$ (가지)

12. $1, 2, 3, 4$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i $(1 \le i \le 4)$ 라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \neq 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 9 가지

해설
가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.
$(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$,
$(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$,
$(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$
$\therefore$ 9 가지

13. 초등학생 4명, 중학생 3명, 고등학생 2명을 일렬로 세울 때, 초등학생은 초등학생끼리, 중학생은 중학생끼리 이웃하여 서는 방법의 수는?

① 3400 ② 3456 ③ 3500 ④ 3546 ⑤ 3650

해설

초등학생, 중학생을 각각 하나로 보면 4 명이 이웃하는 방법과 같다.

$\Rightarrow 4! = 24$

여기에 초등학생, 중학생끼리 자리를 바꾸는 방법을 각각 곱해준다.

$\therefore 24 \times 4! \times 3! = 3456$

14. 6 개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 배열할 때, 모음 a, e가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

a, e 를 제외한 나머지 b, c, d, f 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.
이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 a, e를 늘어 놓으면, a, e는 이웃할 수 없다.
즉, $\square\, b\, \square\, c\, \square\, d\, \square\, f\, \square$의 다섯 개의 $\square$중에 두 개를 골라 a, e 를 배열한다.
따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

15. ${}_{7}C_{2r-1} = {}_{7}C_{r+2}$ 을 만족하는 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $r = 2$

해설

$7 = (2r - 1) + (r + 2)$

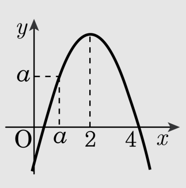
$\therefore\ r = 2$

16. 집합 X $= \{x \mid x \le a,\ x$는 실수$\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \le 2$, $f(a) = a$

$-a^2 + 4a = a \qquad \therefore\ a = 0,\ 3$

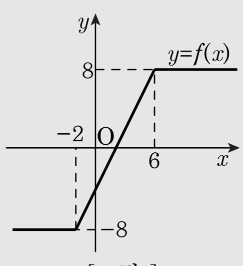
a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0

17. $y = ||x+2| - |x-6||$ 의 그래프와 직선 $y = k$가 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 정수 k 의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

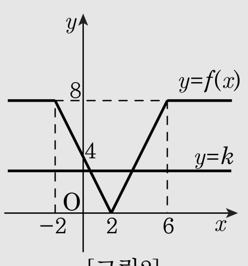
해설

$y = ||x+2| - |x-6|| = |f(x)|$ 이라하면
$y = f(x)$ 에서
절댓값 기호안의 값을 0으로 하는
x 의 값이 $-2, 6$ 이므로
(i) $x < -2$ 일 때,
$y = -(x+2) + (x-6) = -8$
(ii) $-2 \le x < 6$ 일 때,
$y = x + 2 + (x-6) = 2x - 4$
(iii) $x \ge 6$ 일 때,
$y = x + 2 - (x-6) = 8$



[그림1]

이상에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림1]과 같다.
이 때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림1]의
그래프에서 $y \ge 0$ 인 부분은
그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을
x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림2]와 같다. [그림2]에서 $y = |f(x)|$ 의
그래프와
직선 $y = k$가 만나는 점의 개수가 2이상이기 위한 k의 값의 범위는 $0 < k \le 8$
따라서 구하는 정수 k의 개수는 8개이다.



[그림2]

18. 분수함수 $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

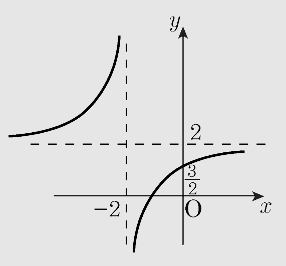
① $\{x \mid -3 < x < -2\}$ ② $\{x \mid x < -2\}$

③ $\{x \mid -2 < x\}$ ④ $\{x \mid -2 \le x < 2\}$

⑤ $\{x \mid -2 \le x < 3\}$

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$



정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

19. 함수 $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a - b$ 의 값은? (단, $a < 0$)

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$y = \dfrac{2x+5}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+3}{x+1} = \dfrac{3}{x+1} + 2$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점$(-1,\ 2)$를 지나고

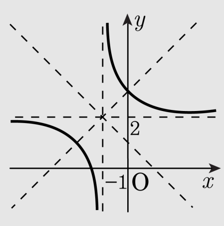
기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y - 2 = -(x+1)$

$\therefore\ y = -x + 1$

따라서 $a = -1,\ b = 1$ 이므로 $a - b = -2$



20. 함수 $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$= \dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1} = -\dfrac{4}{3}$

$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1} = 1$

$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4 = f_1,\ f_5 = f_2,\ f_6 = f_3, \cdots$

$\therefore f_{3n+1} = f_1,\ f_{3n+2} = f_2,\ f_{3n} = f_3$

$100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

21. $f(x)$는 유리수를 계수로 하는 x의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$일 때, $a - b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ 0 ⑤ 3

해설

$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}} = 2+\sqrt{3}$

$\therefore\ f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2+\sqrt{3})$

$= (2+\sqrt{3})^2 + a(2+\sqrt{3}) + b$

$= (7+2a+b) + (4+a)\sqrt{3} = 0$

그런데, $7+2a+b,\ 4+a$는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$7+2a+b = 0,\ 4+a = 0 \quad \therefore\ a = -4,\ b = 1$

$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3}$은 $x^2+ax+b=0$의 한 근이고, $a,\ b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$

$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

22. n명을 일렬로 세울 때, 이 중 특정한 세 명의 순서가 하나로 정해져 있다. 방법의 수는?

① $\dfrac{n!}{2}$ ② $\dfrac{n!}{6}$ ③ $n!$
④ $\dfrac{(n-1)!}{2}$ ⑤ $3(n-1)!$

해설

n명을 일렬로 세우는 방법의 수는 ${}_nP_n = n!$
그런데 여기에는 순서가 정해진 세 명이 자리를 바꾸는 경우의 수가 포함되어 있다.
즉, 세 명의 자리를 바꾸는 방법의 수만큼 배가 된 것이므로 세 명이 자리를 바꾸는 방법의 수로 나누면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는 $\dfrac{n!}{3!} = \dfrac{n!}{6}$

23. 7 층짜리 건물의 1 층에서 7 명이 승강기를 함께 탄 후 7 층까지 올라가는 동안 각각 2 명, 2 명, 3 명이 내리는 방법의 수는?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12600 개

해설

7 명을 2 명, 2 명, 3 명씩 3 개의 조로
나누는 방법의수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 105$$

3 개의 조가 2 층부터 7 층까지 6 개의 층 중
3 개의 층에서 각각 내리므로 구하는 방법의 수는

$$105 \times {}_6P_3 = 12600$$

24. 임의의 양수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

(가) $f(2)=-3$
(나) 임의의 두 양수 x, y 에 대하여
$f(xy)=f(x)+f(y)$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(1\times 2)=f(1)+f(2)$ 에서

$f(1)=0$ $f(1)=f\left(\frac{1}{2}\times 2\right)$

$=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-f(2)=3$

25. 수직선 위에 네 점 A(-2), B(0), C(1) 이 있다. 이 수직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

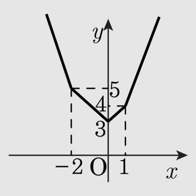
▷ 정답: 3

해설

점 P 의 좌표를 P(x) 라고 하면
$\overline{\mathrm{PA}}=|x+2|$, $\overline{\mathrm{PB}}=|x|$, $\overline{\mathrm{PC}}=|x-1|$,
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x|+|x-1|$ 이므로
$y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 로 놓고
$x=-2,\ 0,\ 1$ 을 경계로 하여 구간을 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=\begin{cases}-3x-1 & (x<-2\text{일 때})\\ -x+3 & (-2\le x<0\text{일 때})\\ x+3 & (0\le x<1\text{일 때})\\ 3x+1 & (x\ge 1\text{일 때})\end{cases}$$

따라서, $y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 3 이다.



26. 다음 보기의 함수 $y=f(x)$ 중 임의의 실수 a , b 에 대하여 관계식 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 만족시키는 것을 <u>모두</u> 고르면?

보기

㈎ $y=x$
㈏ $y=x^2-1$
㈐ $y=-x^2+1$

① ㈎ ② ㈎, ㈏ ③ ㈎, ㈐
④ ㈏, ㈐ ⑤ ㈎, ㈏, ㈐

해설

곡선의 오목, 볼록에 따른 부등식을 살펴보면

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 아래로 볼록인 함수

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 직선

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 위로 볼록인 함수이다.

따라서 ㈎는 직선, ㈏는 아래로 볼록인 함수
㈐는 위로 볼록인 함수 이므로 주어진 부등식을 만족하는 함수는
㈎, ㈏이다.