

1. $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1} + 4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1} + 4 = -\sqrt{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} + 4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$x = 1 \text{ 일 때, 최댓값 } a = -\sqrt{3+1} + 4 = 2$$

$$x = 5 \text{ 일 때, 최솟값 } b = -\sqrt{15+1} + 4 = 0$$

$$\therefore a - b = 2 - 0 = 2$$

2. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 90가지

해설

$${}_{10}P_2 = 90$$

3. 0, 1, 2로 중복을 허락하여 만들 수 있는 다섯 자리의 정수의 개수는?

① 86가지

② 98가지

③ 132가지

④ 162가지

⑤ 216가지

해설

첫 자리에 올 수 있는 숫자는 2가지이고 나머지는 모두 3가지이다.

$$\therefore 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 162 \text{ 가지}$$

4. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 빨강을 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.



답 :

가지



정답 : 20가지

해설

$${}_6C_3 = 20$$

5. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = |x| + 1$ 의 치역을 구하면?

① $\{1\}$

② $\{1, 2\}$

③ $\{2, 3\}$

④ $\{1, 2, 3\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 4\}$

해설

$x = -2, 2$ 일 때 $f(x) = 3$

$x = -1, 1$ 일 때 $f(x) = 2$

$x = 0$ 일 때 $f(x) = 1$

따라서 f 의 치역은 $\{1, 2, 3\}$

6. 1부터 800까지의 자연수 중에서 800과 서로소인 수의 개수를 구하면?

① 310 개

② 320 개

③ 330 개

④ 340 개

⑤ 350 개

해설

800 = $2^5 \times 5^2$ 으로 소인수분해가 된다.

800과 서로소가 되려면 2나 5를 인수로 가져서는 아니되므로 1부터 800까지의 수 중에서 2 또는 5의 배수의 개수를 계산하여 여사건을 이용하면 된다.

2의 배수의 집합을 A , 5의 배수의 집합을 B 라 하면

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\&= 400 + 160 - 80 = 480\end{aligned}$$

따라서 800과 서로 소인수의 개수는

$800 - 480 = 320$ (개)이다.

7. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5) \\ &= 7 \times 40 \times 6 = 1680 \end{aligned}$$

8. 어떤 등산모임에서는 다음과 같이 강원도, 충청도, 전라도 세 지역의 6개의 산을 6주에 걸쳐 주말마다 하나씩 등산할 계획을 세우고 있다.

지역	산
강원도	설악산, 오대산
충청도	계룡산, 소백산
전라도	내장산, 지리산

같은 지역의 산끼리 연속적으로 등산하지 않도록 계획을 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

① 36

② 48

③ 60

④ 120

⑤ 240

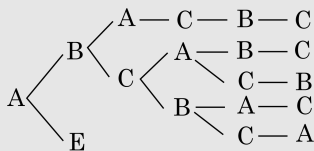
해설

세 지역 강원도, 충청도, 전라도를 각각 A, B, C 라 하면 1주차에 A 지역 산을 등산하고, 2주차에 B 지역 산을 등산하는 경우는 다음 수형도와 같이 5가지가 있고, 같은 지역의 산끼리 위치를 바꾸는 방법은 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)

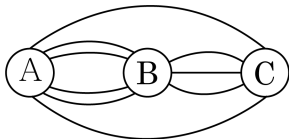
한편, 1주차에 A 지역, 2주차에 C 지역의 산을 등산하는 경우도 같으므로 1주차에 A 지역의 산을 등산하는 방법의 수는 $5 \times 8 \times 2 = 80$ (가지)

또한, 1주차에 B, C 지역의 산을 등산하는 경우의 수도 같다. 따라서 구하는 방법의 수는

$$80 \times 3 = 240 \text{ (가지)}$$



9. 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4 가지, B 에서 C 로 가는 길은 3 가지, A 에서 C 로 가는 길은 2 가지이다. A 에서 C 를 왕복하는 데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수는?



① 24

② 48

③ 56

④ 72

⑤ 96

해설

$$(1) A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$$

$$: 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$(1) A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$$

$$: 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$\therefore 24 + 24 = 48$$

10. 100 원, 300 원, 500 원짜리 3 종류의 사탕이 있다. 이 사탕을 1000 원어치 사는 방법의 수는?

- ① 7개 ② 10개 ③ 13개 ④ 15개 ⑤ 17개

해설

500 원을 기준으로 생각한다.

100 원을 A , 300 원을 B 라 하면,

(1) 500 원 0개 :

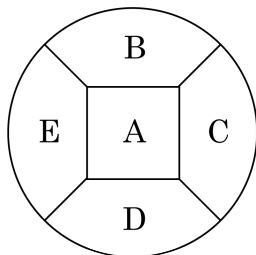
$$(A, B) = (1, 3), (4, 2), (7, 1), (10, 0)$$

(2) 500 원 1개 : $(A, B) = (2, 1), (5, 0)$

(3) 500 원 2개 : $(A, B) = (0, 0)$

$\therefore$ 총 7개

11. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 5 가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



① 160

② 270

③ 360

④ 420

⑤ 540

해설

A 를 먼저 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 5 가지이다. 그 다음 B 를 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 4 가지, C 를 칠할 수 있는 방법은 3 가지이다.

(i) B 와 D 가 다른 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 A, B, C 에 칠한 색을 제외한 2 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 A, B, D 에 칠한 색을 제외한 2 가지이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240 \text{ (가지)}$$

(ii) B 와 D 가 같은 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 B 와 동일하므로 1 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 $A, B(=D)$ 에 칠한 색을 제외한 3 가지이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180 \text{ (가지)}$$

따라서 (i) (ii) 에서 $240 + 180 = 420$ (가지)

12. 1, 2, 3, 4 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i ($1 \leq i \leq 4$) 라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \neq 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 9가지

해설

가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3),$

$(3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1),$

$(4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$

$\therefore 9$ 가지

13. 초등학생 4명, 중학생 3명, 고등학생 2명을 일렬로 세울 때, 초등학생은 초등학생끼리, 중학생은 중학생끼리 이웃하여 서는 방법의 수는?

① 3400

② 3456

③ 3500

④ 3546

⑤ 3650

해설

초등학생, 중학생을 각각 하나로 보면 4 명이 이웃하는 방법과 같다.

$$\Rightarrow 4! = 24$$

여기에 초등학생, 중학생끼리 자리를 바꾸는 방법을 각각 곱해 준다.

$$\therefore 24 \times 4! \times 3! = 3456$$

14. 6 개의 문자 a, b, c, d, e, f 를 일렬로 배열할 때, 모음 a, e 가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

a, e 를 제외한 나머지 b, c, d, f 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.

이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 a, e 를 늘어놓으면, a, e 는 이웃할 수 없다.

즉, $\square b \square c \square d \square f \square$ 의 다섯 개의 $\square$ 중에 두 개를 골라 a, e 를 배열한다.

따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5 P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

15. ${}_7C_{2r-1} = {}_7C_{r+2}$ 을 만족하는 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $r = 2$

해설

$$7 = (2r - 1) + (r + 2)$$

$$\therefore r = 2$$

16. 집합 $X = \{x \mid x \leq a, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

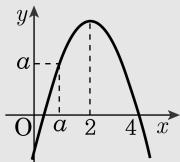
해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \leq 2$, $f(a) = a$

$$-a^2 + 4a = a \quad \therefore a = 0, 3$$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0



17. $y = ||x + 2| - |x - 6||$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 정수 k 의 개수는?

① 4 개

② 5 개

③ 6 개

④ 7 개

⑤ 8 개

해설

$y = ||x + 2| - |x - 6|| = |f(x)|$ 이라하면

$y = f(x)$ 에서

절댓값 기호안의 값을 0 으로 하는

x 의 값이 $-2, 6$ 이므로

(i) $x < -2$ 일 때,

$$y = -(x + 2) + (x - 6) = -8$$

(ii) $-2 \leq x < 6$ 일 때,

$$y = x + 2 + (x - 6) = 2x - 4$$

(iii) $x \geq 6$ 일 때,

$$y = x + 2 - (x - 6) = 8$$

이상에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림1] 과 같다.

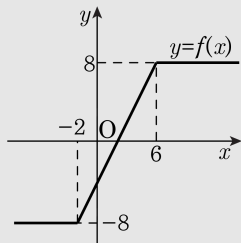
이 때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림1] 의

그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은

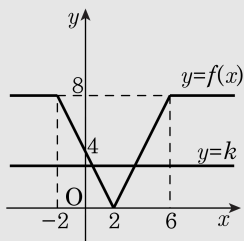
그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을

x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림2] 와 같다. [그림2] 에서 $y = |f(x)|$ 의 그래프와

직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이상이기 위한 k 의 값의 범위는 $0 < k \leq 8$ 따라서 구하는 정수 k 의 개수는 8 개이다.



[그림1]



[그림2]

18. 분수함수 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을
바르게 구한 것은?

① $\{x \mid -3 < x < -2\}$

② $\{x \mid x < -2\}$

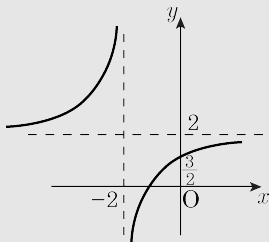
③ $\{x \mid -2 < x\}$

④ $\{x \mid -2 \leq x < 2\}$

⑤ $\{x \mid -2 \leq x < 3\}$

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$



정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

19. 함수 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때,
 $a - b$ 의 값은? (단, $a < 0$)

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

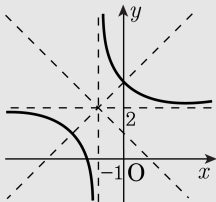
이므로

주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 2)$ 를 지나고

기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.
 이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로
 직선의 방정식은 $y - 2 = -(x + 1)$

$$\therefore y = -x + 1$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$ 이므로 $a - b = -2$



20. 함수 $f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1

② $-\frac{5}{2}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1} \text{ 에서 } f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{-\frac{10}{2} + 3}{\frac{5}{2} - 1} = -\frac{4}{3}$$

$$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{3} + 3}{\frac{4}{3} - 1} = 1$$

$$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore f_4 = f_1, f_5 = f_2, f_6 = f_3, \dots$$

$$\therefore f_{3n+1} = f_1, f_{3n+2} = f_2, f_{3n} = f_3$$

$$100 = 3 \times 33 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f_{100}(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

21. $f(x)$ 는 유리수를 계수로 하는 x 의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$,
 $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -3

④ 0

⑤ 3

해설

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4 \times 3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2 + \sqrt{3})$$

$$= (2 + \sqrt{3})^2 + a(2 + \sqrt{3}) + b$$

$$= (7 + 2a + b) + (4 + a)\sqrt{3} = 0$$

그런데, $7 + 2a + b$, $4 + a$ 는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$$7 + 2a + b = 0, 4 + a = 0 \quad \therefore a = -4, b = 1$$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2 + \sqrt{3}$ 은 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이고, a, b 가 유리수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

22. n 명을 일렬로 세울 때, 이 중 특정한 세 명의 순서가 하나로 정해져 있다. 방법의 수는?

① $\frac{n!}{2}$

② $\frac{n!}{6}$

③ $n!$

④ $\frac{(n-1)!}{2}$

⑤ $3(n-1)!$

해설

n 명을 일렬로 세우는 방법의 수는 ${}_nP_n = n!$

그런데 여기에는 순서가 정해진 세 명이 자리를 바꾸는 경우의 수가 포함되어 있다.

즉, 세 명의 자리를 바꾸는 방법의 수만큼 배가 된 것이므로 세 명이 자리를 바꾸는 방법의 수로 나누면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{n!}{3!} = \frac{n!}{6}$

23. 7 층짜리 건물의 1 층에서 7 명이 승강기를 함께 탄 후 7 층까지 올라가는 동안 각각 2 명, 2 명, 3 명이 내리는 방법의 수는?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12600 개

해설

7 명을 2 명, 2 명, 3 명씩 3 개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 105$$

3 개의 조가 2 층부터 7 층까지 6 개의 층 중 3 개의 층에서 각각 내리므로 구하는 방법의 수는

$$105 \times {}_6P_3 = 12600$$

24. 임의의 양수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

(가) $f(2) = -3$

(나) 임의의 두 양수 x, y 에 대하여

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$f(1 \times 2) = f(1) + f(2) \text{ 에서}$$

$$f(1) = 0 \quad f(1) = f\left(\frac{1}{2} \times 2\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = 3$$

25. 수직선 위에 네 점 A(-2), B(0), C(1) 이 있다. 이 수직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 P 의 좌표를 $P(x)$ 라고 하면

$$\overline{PA} = |x + 2|, \overline{PB} = |x|, \overline{PC} = |x - 1|,$$

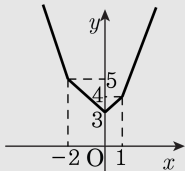
$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x| + |x - 1| \text{ 이므로}$$

$y = |x + 2| + |x| + |x - 1|$ 로 놓고

$x = -2, 0, 1$ 을 경계로 하여 구간을 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = \begin{cases} -3x - 1 & (x < -2 \text{ 일 때}) \\ -x + 3 & (-2 \leq x < 0 \text{ 일 때}) \\ x + 3 & (0 \leq x < 1 \text{ 일 때}) \\ 3x + 1 & (x \geq 1 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

따라서, $y = |x + 2| + |x| + |x - 1|$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 3 이다.



26. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 임의의 실수 a, b 에 대하여 관계식 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 만족시키는 것을 모두 고르면?

보기

(가) $y = x$

(나) $y = x^2 - 1$

(다) $y = -x^2 + 1$

① (가)

② (가), (나)

③ (가), (다)

④ (나), (다)

⑤ ((가), (나), (다))

해설

곡선의 오목, 볼록에 따른 부등식을 살펴보면

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 아래로 볼록인 함수

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 직선

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 위로 볼록인 함수이다.

따라서 (가)는 직선, (나)는 아래로 볼록인 함수

(다)는 위로 볼록인 함수 이므로 주어진 부등식을 만족하는 함수는 (가), (나)이다.