

1. 두 집합 $X = \{-2, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x + 1$

② $x \rightarrow x^2$

③ $x \rightarrow x - 1$

④ $x \rightarrow x + 2$

⑤ $x \rightarrow 2x + 1$

해설

각각의 치역을 구하면

① $\{-1, 1, 2\}$

② $\{0, 1, 4\}$

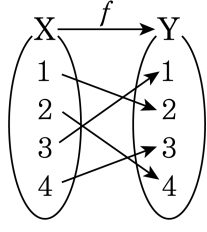
③ $\{-3, -1, 0\}$

④ $\{0, 2, 3\}$

⑤ $\{-3, 1, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④이다.

2. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



- ① 함수이다.
- ② 정의역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ③ 공역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 4} 이다.
- ⑤ 일대일 대응이다.

해설

- ① 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
- ②, ③ 정의역과 공역은 모두 {1, 2, 3, 4}이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 3, 4}이다.
- ⑤ 집합 X 의 각 원소에 대한 함수값이 모두 다르므로 일대일대응이다.

3. 함수 $y = x - 2$ 의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$

② $y = x + 2$

③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$ 를 x 에 관해서 풀면

$$x = y + 2$$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x + 2$

4. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
- ③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 짝수이다.
- ④ a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

5. $x - 4 = 0$ 이 $x^2 + ax - 48 = 0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + ax - 48 = 0$$

$$\therefore 16 + 4a - 48 = 0$$

$$\therefore a = 8$$

6. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

- ① $ab \leq 0$
- ② $ab \geq 0$
- ③ $a + b \geq 0$
- ④ $ab < 0$
- ⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여
 $(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$
 $= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면
 a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab < 0$

7. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

8. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ① $x = y$
- ② $xy > 0$
- ③ $xy \geq 0$
- ④ $x \geq 0, y \geq 0$
- ⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
 $xy = |xy|$
(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$
(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
 $xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$
(i), (ii) 에서
 $xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$

9. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

10. $3 + \sqrt{8}$ 의 소수 부분을 x 라 할 때, $\sqrt{x^2 + 4x}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로

$3 + \sqrt{8} - 2 + 2 = 5 + \sqrt{8} - 2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8} - 2$

(2) 단계

$x + 2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2 + 4x + 4 = 8$,

$x^2 + 4x = 4$ 를 대입하면

(준식) $= \sqrt{4} = 2$

11. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$, $x = \sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

- ① $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$ ② $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$
③ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
⑤ $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $x = \sqrt{y+1}$ 은
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x$ 의 교점을 구하면 된다.
 $\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

12. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

- ① 8 개 ② 9 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

$$216 = 2^3 \times 3^3,$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ 에서 G.C.D.는 } 2^3 \times 3^2$$

$$\text{따라서 공약수의 개수는 } (3 + 1)(2 + 1) = 12$$

13. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 90가지

해설

$${}_{10}P_2 = 90$$

15. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $a > 0, b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
- ② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$
- ③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$
- ④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \leq |a| - |b|$
- ⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

- ① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
 $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
 $\Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
- ② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
- ③ : (반례) $a = 0, b = 0$

16. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

17. 함수 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에 대하여 $g(3x-1) = f(x)$ 을 항상 만족시키는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$

③ $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

⑤ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

② $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

④ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

해설

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ 에서 } f(x) = 2x + 3$$

$$g(3x-1) = f(x) \text{ 에서 } g(3x-1) = 2x + 3$$

$$3x-1 = t \text{ 라 하면 } x = \frac{t+1}{3} \text{ 이므로}$$

$$g(t) = 2\left(\frac{t+1}{3}\right) + 3, \quad g(t) = \frac{2}{3}t + \frac{11}{3}$$

$$\therefore g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

18. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \textcircled{3} \quad & \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \\ \textcircled{5} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c} \\ \textcircled{4} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

19. 함수 $y = \frac{3}{x}$ 을 적당히 이동하였을 때 겹치지 않는 것은?

① $y = \frac{3}{x} + 2$

② $y = \frac{3}{x-2}$

③ $y = \frac{-4x+11}{x-2}$

④ $y = \frac{x+3}{x-1}$

⑤ $y = \frac{2x-1}{x-2}$

해설

① $y = \frac{3}{x} + 2$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

② $y = \frac{3}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

③ $y = \frac{-4x+11}{x-2} = \frac{-4(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 4$

따라서 이 함수는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 y 축의 방향으로
-4만큼 평행이동한 것이다.

④ $y = \frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 1$ 는

$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지지 않는다.

⑤ $y = \frac{2(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 2$ 는

$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼

y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

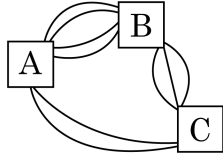
20. $x^2 = 6 + 3\sqrt{3}$, $y^2 = 6 - 3\sqrt{3}$ 을 만족하는 두 양수 x , y 에 대하여,
 $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

① $6\sqrt{2}$ ② $9\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $27\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= 6 + 3\sqrt{3}, \quad y^2 = 6 - 3\sqrt{3} \\x^2y^2 &= (6 + 3\sqrt{3})(6 - 3\sqrt{3}) = 36 - 27 = 9 \\xy &= 3 \\(x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\&= 6 + 3\sqrt{3} + 6 - 3\sqrt{3} + 6 \\&= 12 + 6 = 18 \\x+y &= 3\sqrt{2} \\\Rightarrow x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\&= (3\sqrt{2})^3 - 3 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} \\&= 54\sqrt{2} - 27\sqrt{2} = 27\sqrt{2}\end{aligned}$$

21. 아래쪽 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4가지, B 에서 C 로 가는 길은 3가지, A 에서 C 로 가는 길은 2가지이다. A 에서 C 를 왕복하는데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수를 구하여라.



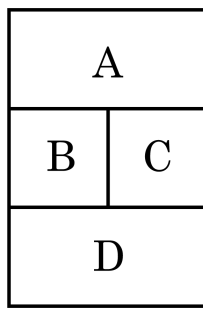
▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 48 가지

해설

(i) $A-B-C-A$ 인 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 = 24$
(ii) $A-C-B-A$ 인 경우의 수는 $2 \times 3 \times 4 = 24$ 이상에서 구하는 방법의 수는
 $24 + 24 = 48$

22. 원재가 가입한 동아리는 이 동아리를 상징하는 깃발을 검정, 초록, 빨강의 세 가지 색을 모두 사용하여 다음 그림과 같은 네 영역으로 구분하여 칠하려고 한다. 서로 다르게 칠하는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답: 가지

▶ 정답 : 6가지

해설

A, B, C, D 의 순서대로 색을 칠한다고 할 때, A 의 영역을 칠하는 방법의 수는 검정, 초록, 빨강의 3가지이다. 이런 각 경우에 대하여 B 의 영역을 칠하는 방법은 3가지 색 중에서 A 의 영역을 칠한 색을 제외한 2가지이고, C 의 영역을 칠하는 방법의 수는 A, B 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1가지이다.

마지막으로 D 의 영역을 칠하는 방법의 수는 B, C 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1가지 방법이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ (가지)

23. 9 명의 야구 선수와 5 명의 농구 선수 중에서 3 명의 야구 선수와 2 명의 농구 선수를 뽑아 위원회를 구성하려고 한다. 야구 선수 중 특별한 두 명은 동시에 뽑히지 않게 하는 방법의 수를 구하면?

- ① 350
- ② 560
- ③ 770
- ④ 910
- ⑤ 1260

해설

- (i) ㉠ 9 명의 야구 선수 중에서 특별한 두 명 중 한 명도 포함되지 않게 3 명의 위원을 뽑는 방법의 수는 ${}_7C_3$
㉡ 9 명의 야구 선수 중에서 특별한 두 명 중 한 명은 위원회에 포함되게 3 명의 위원을 뽑는 방법의 수는 $2 \times {}_7C_2$
- (ii) 5 명의 농구 선수 중 2 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2$
- (i), (ii) 에서
 $({}_7C_3 \times {}_5C_2) + ({}_7C_2 \times {}_5C_2 \times 2) = 10 \times (35 + 42) = 770$

24. 목욕통에 세 개의 수도꼭지 A, B, C로 물을 채우려고 한다. 세 개를 모두 틀어 물을 채우면 1시간이 걸리고, A와 C를 틀어 채우면 1.5시간, B와 C를 틀어 채우면 2시간이 걸린다. A와 B를 틀어 채울 때 걸리는 시간은?

① 1.2 ② 1.25 ③ 1.3 ④ 1.35 ⑤ 1.5

해설

물의 양을 1로 보고 수도꼭지 A, B, C가 시간 당 채우는 양을 각각 a , b , c 라 하면

$$\frac{1}{a+b+c} = 1, \frac{1}{a+c} = \frac{3}{2}, \frac{1}{b+c} = 2$$

연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$

따라서 A와 B를 틀어 채울 때 걸리는 시간은

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{5} = 1.2(\text{시간})$$

25. 2002년 월드컵은 32개팀이 참가하여 4개팀 8조로 나누어 리그전을 치른 후 16강을 결정했다. 16강은 토너먼트 방식으로 우승팀을 가렸고, 별도로 3, 4위전이 있었다. 2002년 월드컵에서 치른 총 게임 수를 구하여라.

① 44 ② 58 ③ 64 ④ 72 ⑤ 76

해설

각 조별 리그전 : ${}_4C_2 = 6$
16강 토너먼트 : $16 - 1 = 15$
3, 4위전 : 1
 $\therefore {}_4C_2 \times 8 + (16 - 1) + 1 = 64$