1. 두 집합 $X=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x+1$　② $x \rightarrow x^2$　③ $x \rightarrow x-1$

④ $x \rightarrow x+2$　⑤ $x \rightarrow 2x+1$

해설

각각의 치역을 구하면

① $\{-1,\ 1,\ 2\}$

② $\{0,\ 1,\ 4\}$

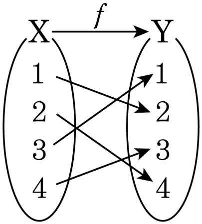
③ $\{-3,\ -1,\ 0\}$

④ $\{0,\ 2,\ 3\}$

⑤ $\{-3,\ 1,\ 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④ 이다.

2. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



① 함수이다.

② 정의역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이다.

③ 공역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이다.

④ 치역은 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

⑤ 일대일 대응이다.

해설

① 주어진 대응 x의 각 원소에 y가 1개씩 대응 하므로 함수이다.
②, ③ 정의역과 공역은 모두 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.
④ 치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.
⑤ 집합 X의 각 원소에 대한 함숫값이 모두 다르므로 일대일대응이다.

3. 함수 $y = x - 2$의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$ ② $y = x + 2$ ③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$를 x에 관해서 풀면

$x = y + 2$

x와 y를 바꾸면 $y = x + 2$

4. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

'$a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.'

① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.

③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$가 짝수이다.

④ a, b중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$가 홀수이다.

⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

5. $x-4=0$ 이 $x^2+ax-48=0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x-4=0 \Rightarrow x^2+ax-48=0$

$\therefore\ 16+4a-48=0$

$\therefore\ a=8$

6. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b|>|a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$ ② $ab \geq 0$ ③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

7. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

8. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

9. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서 최댓값은 14이다.

10. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2<\sqrt{8}<3$이므로

$3+\sqrt{8}-2+2=5+\sqrt{8}-2$ 에서

소수 부분 $x=\sqrt{8}-2$

(2) 단계

$x+2=\sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4=8$,

$x^2+4x=4$를 대입하면

(준식)$=\sqrt{4}=2$

11. 두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$, $x=\sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$ ② $\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$

③ $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ④ $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

⑤ $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$ 과 $x=\sqrt{y+1}$은
직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$y=\sqrt{x+1}$ 과 $y=x$ 의 교점을 구하면 된다.

$\therefore \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

12. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개 ② 9 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

$216 = 2^3 \times 3^3$,

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 에서 G.C.D.는 $2^3 \times 3^2$

따라서 공약수의 개수는 $(3+1)(2+1) = 12$

13. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 90 가지

해설

$_{10}P_2 = 90$

14. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ **답:** 조건

▷ **정답:** 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ $\therefore$ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore q$ 는 p 이기 위한 필요조건

15. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a > 0,\ b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$

③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$

④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \le |a| - |b|$

⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
$a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
$\Rightarrow \quad 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
③ : (반례) $a = 0,\ b = 0$

16. $a>0,\ b>0,\ c>0$ 일 때, $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{2c}{b}+\dfrac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2b}{a}\times\frac{2c}{b}\times\frac{2a}{c}}=3\times 2=6$$

$$\therefore\ \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}\geq 6$$

17. 함수 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에 대하여 $g(3x-1) = f(x)$ 을 항상 만족시키는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$

② $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

③ $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

④ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

⑤ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

해설

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에서 $f(x) = 2x + 3$

$g(3x-1) = f(x)$ 에서 $g(3x-1) = 2x + 3$

$3x - 1 = t$ 라 하면 $x = \frac{t+1}{3}$ 이므로

$g(t) = 2\left(\frac{t+1}{3}\right) + 3,\ g(t) = \frac{2}{3}t + \frac{11}{3}$

$\therefore\ g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

18. $a : b = c : d$일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ② $\frac{a+d}{a-d}=\frac{b+c}{b-c}$

③ $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$ ④ $\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

⑤ $\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$

해설

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$에서

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\cdots$ ㉠

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\cdots$ ㉡

㉡ ÷ ㉠하면

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$에서

$\frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}\cdots$ ㉢

$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}\cdots$ ㉣

㉣ ÷ ㉢하면

$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$에서 가비의 리를 이용하면

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

$\therefore \frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

19. 함수 $y=\dfrac{3}{x}$을 적당히 이동하였을 때 겹치지 않는 것은?

① $y=\dfrac{3}{x}+2$　② $y=\dfrac{3}{x-2}$　③ $y=\dfrac{-4x+11}{x-2}$

④ $y=\dfrac{x+3}{x-1}$　⑤ $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$

해설

① $y=\dfrac{3}{x}+2$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를

y축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

② $y=\dfrac{3}{x-2}$ 의 그래프는$y=\dfrac{3}{x}$ 의 그래프를

x축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

③ $y=\dfrac{-4x+11}{x-2}=\dfrac{-4(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}-4$

따라서 이 함수는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 2만큼 y축의 방향으로

-4만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+1$는

$y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는다.

⑤ $y=\dfrac{2(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+2$는

$y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼

y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

20. $x^2 = 6 + 3\sqrt{3}$, $y^2 = 6 - 3\sqrt{3}$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여, $x^3 + y^3$의 값을 구하면?

① $6\sqrt{2}$ ② $9\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $27\sqrt{2}$

해설

$x^2 = 6 + 3\sqrt{3},\ y^2 = 6 - 3\sqrt{3}$

$x^2y^2 = (6 + 3\sqrt{3})(6 - 3\sqrt{3}) = 36 - 27 = 9$

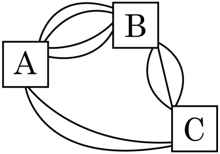
$xy = 3$

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &= 6 + 3\sqrt{3} + 6 - 3\sqrt{3} + 6 \\ &= 12 + 6 = 18\end{aligned}$$

$x + y = 3\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (3\sqrt{2})^3 - 3\cdot 3\cdot 3\sqrt{2} \\ &= 54\sqrt{2} - 27\sqrt{2} = 27\sqrt{2}\end{aligned}$$

21. 아래쪽 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4가지, B 에서 C 로 가는 길은 3가지, A 에서 C 로 가는 길은 2가지이다. A 에서 C 를 왕복하는데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수를 구하여라.



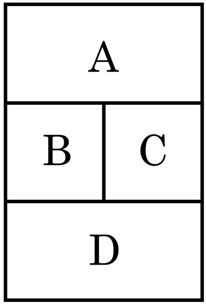
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 48 가지

해설

(i) $A-B-C-A$ 인 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 = 24$
(ii) $A-C-B-A$ 인 경우의 수는 $2 \times 3 \times 4 = 24$ 이상에서 구하는 방법의 수는
$24 + 24 = 48$

22. 원재가 가입한 동아리는 이 동아리를 상징하는 깃발을 검정, 초록, 빨강의 세 가지 색을 모두 사용하여 다음 그림과 같은 네 영역으로 구분하여 칠하려고 한다. 서로 다르게 칠하는 방법의 수를 구하여라.



▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 6 가지

해설

A, B, C, D 의 순서대로 색을 칠한다고 할 때, A 의 영역을 칠하는 방법의 수는 검정, 초록, 빨강의 3 가지이다. 이런 각 경우에 대하여 B 의 영역을 칠하는 방법은 3 가지 색 중에서 A 의 영역을 칠한 색을 제외한 2 가지이고, C 의 영역을 칠하는 방법의 수는 A, B 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1 가지이다.
마지막으로 D 의 영역을 칠하는 방법의 수는 B, C 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1가지 방법이다. 따라서 구하는 방법의 수는
$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ (가지)

23. 9 명의 야구 선수와 5 명의 농구 선수 중에서 3 명의 야구 선수와 2 명의 농구 선수를 뽑아 위원회를 구성하려고 한다. 야구 선수 중 특별한 두 명은 동시에 뽑히지 않게 하는 방법의 수를 구하면?

① 350 ② 560 ③ 770 ④ 910 ⑤ 1260

해설

(i) ㉠ 9 명의 야구 선수 중에서 특별한 두 명 중 한 명도 포함되지 않게 3 명의 위원을 뽑는 방법의 수는 ${}_7C_3$

㉡ 9 명의 야구 선수 중에서 특별한 두 명 중 한 명은 위원회에 포함되게 3 명의 위원을 뽑는 방법의 수는 $2 \times {}_7C_2$

(ii) 5 명의 농구 선수 중 2 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2$

(i), (ii) 에서

$({}_7C_3 \times {}_5C_2) + ({}_7C_2 \times {}_5C_2 \times 2) = 10 \times (35 + 42) = 770$

24. 목욕통에 세 개의 수도꼭지 A, B, C로 물을 채우려고 한다. 세 개를 모두 틀어 물을 채우면 1시간이 걸리고, A와 C를 틀어 채우면 1.5시간, B와 C를 틀어 채우면 2시간이 걸린다. A와 B를 틀어 채울 때 걸리는 시간은?

① 1.2 ② 1.25 ③ 1.3 ④ 1.35 ⑤ 1.5

해설

물의 양을 1로 보고 수도꼭지 A, B, C가 시간 당 채우는 양을 각각 $a,\ b,\ c$라 하면

$$\frac{1}{a+b+c}=1,\ \frac{1}{a+c}=\frac{3}{2},\ \frac{1}{b+c}=2$$

연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}$

따라서 A와 B를 틀어 채울 때 걸리는 시간은

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{6}{5}=1.2(\text{시간})$$

25. 2002년 월드컵은 32개팀이 참가하여 4개팀 8조로 나누어 리그전을 치룬 후 16강을 결정했다. 16강은 토너먼트 방식으로 우승팀을 가렸고, 별도로 3, 4위전이 있었다. 2002년 월드컵에서 치른 총 게임 수를 구하여라.

① 44 ② 58 ③ 64 ④ 72 ⑤ 76

해설

각 조별 리그전 : ${}_4C_2 = 6$

16강 토너먼트 : $16 - 1 = 15$

3, 4위전 : 1

$\therefore\ {}_4C_2 \times 8 + (16 - 1) + 1 = 64$