1. 등식 $3x-2yi=(2+i)^2$ 이 성립하는 x, y에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$3x-2yi=(2+i)^2=3+4i$

$x=1, \quad y=-2$

$\therefore \quad xy=-2$

2. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$가 -3이므로 $-3 + 5 = 2$

3. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$일 때

$|x-1| = x-1$이므로, $x-1=2$

$\therefore x=3$

ii) $x<1$일 때

$|x-1| = -x+1$이므로, $-x+1=2$

$\therefore x=-1$

따라서 (i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

4. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　　② 1　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

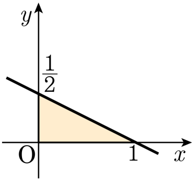
$$(\text{준식}) = (2x-2y)+(x+2y-1)\,i = 0$$

$$\therefore\ x+2y-1=0,$$

$$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \text{넓이} = \frac{1}{4}$$



5. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면

$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$

이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.

즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$

한편, $x = 1$이면 $z = 0 + 0i = 0$이므로

$z \neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ x = -1$

6. $z=(1+i)x^2+(2-i)x-8-2i$에 대하여 $z^2<0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$z=(x^2+2x-8)+(x^2-x-2)i$$
$$=(x-2)(x+4)+(x+1)(x-2)i$$

그런데, $z^2<0$에서 z는 순허수이므로

$\therefore\ x=-4$

7. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$

i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$

$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$ ㉠

$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

8. 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i+4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2+2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

9. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$의 해가 존재하지 않기 위한 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$이면 해가 없다.

10. 방정식 $a(ax-1)=2(ax-1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, 부정

② $a=2$ 일 때, 불능

③ $a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

④ $a\neq 0$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

해설

$a(ax-1)=2(ax-1), a^2x-2ax=a-2$ 에서

$a(a-2)x=a-2$

i) $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

ii) $a=2$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)

iii) $a=0$ 일 때, $0\cdot x=-2$ 이므로 해가 없다. (불능)

따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

11. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2$

$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$

$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

12. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$

④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$

$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

13. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

14. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$

② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$

④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\{x+(1+i)\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

15. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ± 1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ± 2

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ⅱ) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 1$

16. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(ⅰ) $x \geq 1$일 때

$x^2-2x+1+x-1-6=0$

$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로

$x=-2$, $x=3$

그런데 $x \geq 1$이므로 $x=3$

(ⅱ) $x<1$일 때

$x^2-2x+1-x+1-6=0$

$x^2-3x-4=0$, $(x-4)(x+1)=0$

$x=-1$, $x=4$

그런데 $x<1$이므로 $x=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3, -1$이므로

두 근의 합은 2

17. 이차방정식 $x^2 - 4|x| - 5 = 0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

i) $x \geq 0$일 때,

$x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0$

$\therefore x = 5$

ii) $x < 0$일 때,

$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0$

$\therefore x = -5$

i), ii) 에서 두 근의 곱은 -25이다.

18. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고

p, q가 유리수이면 남은 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

두 근의 합 $-p=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$

$\therefore p=-4$

두 근의 곱 $q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

$\therefore p+q=-4+1=-3$

19. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

20. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 <u>모두</u> 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \leq \dfrac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

21. 이차방정식 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$이 중근을 가질 조건을 구하면?(단, $a \neq b$)

① $a=b+c$ ② $2a=b+c$ ③ $a=b-c$

④ $2a=b-c$ ⑤ $2a=2b-c$

해설

$$\begin{aligned} D &= (b-c)^2-4(a-b)(c-a) \\ &= b^2+c^2-2bc-4(ac-a^2-bc+ab) \\ &= 4a^2+b^2+c^2-4ac+2bc-4ab \\ &= (2a-b-c)^2 \end{aligned}$$

준식이 중근을 가져야 하므로

$D=0$이어야 한다.

따라서, $(2a-b-c)^2=0,\ \ 2a-b-c=0$

$\therefore\ 2a=b+c$

22. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y - 4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

23. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

24. a가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$도 실근을 가진다.

② $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$은 허근을 가진다.

③ $f(x) = 0$이 허근을 가지면 $g(x) = 0$도 허근을 가진다.

④ $g(x) = 0$이 실근을 가지면 $f(x) = 0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x) = 0$이 허근을 가지면 $f(x) = 0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$과 $g(x) = 0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1,$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a-1$$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1 > 2a-1$,

즉, $D_1 > D_2$이므로 $D_1 < 0$이면 $D_2 < 0$

25. 방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 갖도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+2b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식에서 $\dfrac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+k+b)$

$$=(2a-1)k+a^2-b=0$$

이것이 k에 대한 항등식이 되어야 하므로

$2a-1=0, \quad a^2-b=0$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}, \quad b=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a+2b=1$

26. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+(k^2+4k-2b)=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$D'=(k+a)^2-(k^2+4k-2b)=0$

$(2a-4)k+a^2+2b=0$

모든 k에 대해서 성립하려면,

$2a-4=0$이고 $a^2+2b=0$

$\therefore\ a=2, \quad b=-2$

$\therefore\ a-b=4$

27. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ $a=b$ 인 이등변삼각형

④ $b=c$ 인 이등변삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,

$(a-c)x^2+2bx+a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$D=0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$

즉 $b^2-a^2+c^2=0$

$\therefore\ a^2=b^2+c^2$

따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

28. x에 대한 다항식 $(x^2-2x)^2+3(x^2-2x)-4$를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① x^2-2　　② x^2+2

③ $x^2-4x+2\sqrt{2}-4$　　④ $x^2+4x+2\sqrt{2}$

⑤ $4x-4$

해설

$x^2-2x=t$ 로 치환할 때,

t^2+3t-4

$=(t+4)(t-1)$

$=(x^2-2x+4)(x^2-2x-1)$

$=(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

$(\because\ x^2-2x+4$ 의 $\dfrac{D}{4})$

인수의 합은

$(x^2-2x+4)+(x-1-\sqrt{2})+(x-1+\sqrt{2})=x^2+2$

29. 10 이하의 자연수 n에 대해, $\dfrac{(1+i)^{2n}}{2^n}=-1$ 을 만족하는 모든 n의 총합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n}=\frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n}=\left(\frac{2i}{2}\right)^n=i^n$$

$i^n=-1$이므로 $n=4k+2(k=0,1,2,3,\cdots)$

n이 10 이하의 자연수이므로 $n=2,6,10$

$\therefore\ 2+6+10=18$

30. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수) 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ $f(z) \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 라 하면

$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \bar{w}$

$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

31. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13　② $11+2i$　③ 12

④ $12-i$　⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$

$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$

$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$

$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$

$=(2+3i)(2-3i)$

$=13$

32. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$라면

$1+i+z = 1+i+a+bi = (1+a)+(1+b)i$

이것이 순허수이므로 $1+a = 0$, $a = -1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

33. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a, b는 실수)일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore\ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

34. $a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $-1+\sqrt{3}i$

해설

$$a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$2a+1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$4a^2+4a+1=-3 \quad \Rightarrow \quad a^2+a+1=0$

양변에 $a-1$ 를 곱하면

$(a-1)(a^2+a+1)=0 \Leftrightarrow a^3-1=0$

$\therefore \ a^3 = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3a^2 + a^3 - 1 \\ &= a^2 \\ &= -a-1(\because a^2+a+1=0) \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

35. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

36. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개　　② 3개　　③ 4개

④ 5개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

37. 이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y-1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2-(a+y)x-(2y^2+3y+1)=0$

근의 공식에서

$$x=\frac{a+y\pm\sqrt{(a+y)^2+4(2y^2+3y+1)}}{2}$$

$$=\frac{a+y\pm\sqrt{9y^2+2(a+6)y+a^2+4}}{2}$$

주어진 식이 x, y에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(=D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2+4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2+4)=-8a^2+12a=0$$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

38. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha| = \frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8$, $4q=p^2+8p+20$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore$ $p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore$ $p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

39. n이 자연수이고 α_n, β_n이 이차방정식 $(n+\sqrt{n(n-1)})x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$의 두 실근일 때, $(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+...+\beta_{49})$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 6　⑤ 7

해설

$$\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$$

근과 계수의 관계에 따라

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

$$\alpha_1+\beta_1=\sqrt{1}-0$$

$$\alpha_2+\beta_2=\sqrt{2}-\sqrt{1}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{49}+\beta_{49}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{49})$$

$$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{49}+\beta_{49})$$

$$=1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$$

$$=\sqrt{49}=7$$

40. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$, $f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$ ② $x^2-4x-1=0$

③ $x^2-x-4=0$ ④ $x^2-x+4=0$

⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2$, $b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1$, $b=-2$, $a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

41. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$이라 하면
$x^2 + bx + (c+1) = 0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore \ D = b^2 - 4(c+1) = 0$
$\therefore \ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c-3) = 0$의 두 근은 $\alpha, \ 2\alpha$가 된다.
$\therefore \ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore \ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12, \ c = 35$이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore \ x = -5$ 또는 $-7, \quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

42. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 $\alpha,\ \beta$를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi\ (q\neq 0)$

$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로

$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서

$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$

$\therefore\ p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$

$q\neq 0$이므로

$p=1,\ q^2=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$

$\therefore\ x^2-2x+3=0$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$

43. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근
② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근
④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$

$\quad = (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots$ ㉠ $(\because\ b \neq 0)$

$a > 0,\ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로

(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots$ ㉡

(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

44. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \cdots$ ①

$\therefore\ \alpha+1=-\alpha^2, \beta+1=-\beta^2$

①의 양변에 각각 $\alpha-1, \beta-1$ 을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=1, \beta^3=1$

$(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$

$=(-\alpha^2)^{10}+(-\beta^2)^{10}$

$=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\beta^3)^6\cdot\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=-1\ (\because\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1\ )$

해설

$\alpha+1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta+1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha+1=A,\ \beta+1=B$ 라 하면

$A+B=1, AB=1$ 이므로 $A,\ B$ 는

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근 이다.

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1, A^3=B^3=-1$

$$\begin{aligned}(\text{준식})=A^{10}+B^{10} &= \left(A^3\right)^3\cdot A+\left(B^3\right)^3\cdot B\\ &=-(A+B)\\ &=-1\end{aligned}$$

45. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 가 $9 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_9 = 0$ 을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_3} \cdot \cdots \cdot \sqrt{x_9}$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $3i$
② $-3i$
③ $3i,\ -3i$
④ $3,\ -3$
⑤ $3,\ -3,\ 3i,\ -3i$

해설

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_9 = -9$ 이므로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m$ 이라 하고 양수인 것들을
$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n$ 이라 하면, ($m + n = 9,\ m$ 은 홀수)
(i) $m = 4k + 1$ ($k = 0,\ 1,\ 2$) 일 때

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\cdots\sqrt{x_9}$$
$$= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1}$$
$$= \sqrt{9} \cdot i = 3i$$

(ii) $m = 4k + 3$ ($k = 1,\ 2$) 일 때

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\cdots\sqrt{x_9}$$
$$= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3}$$
$$= \sqrt{9} \cdot i^3$$
$$= -3i$$

(i), (ii) 에서 $3i,\ -3i$

46. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha+\beta=-3<0$, $\alpha\beta=1>0$, $D=9-4>0$이므로 두 근은 모두 음수이다.

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ $\alpha<0$, $\beta<0$이므로)

$=-3-2=-5$

$\therefore\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}i$

한편, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(-\alpha)\cdot(-1)}+\sqrt{(-\beta)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{-\alpha}\cdot i+\sqrt{-\beta}\cdot i$

$=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})\cdot i$

$\therefore\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$는 (양수)$\times i$ 꼴이다.

$\therefore\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}i$