

1. 다음 중 치역이 실수 전체의 집합인 것은 무엇인가?

① $y = 2x$

② $y = -x^2$

③ $y = x^2 - 2$

④ $y = -x^2 + 2x$

⑤ $y = 3$

해설

② $y \leq 0$ ③ $y \geq -2$ ④ $y \leq 1$ ⑤ $y = 3$

2. $x = 4 - \sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 8x + 15$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x = 4 - \sqrt{3}$ 에서 $x - 4 = -\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면, $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 = 3$ 이므로
 $x^2 - 8x = -13$
 $\therefore x^2 - 8x + 15 = -13 + 15 = 2$

4. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.
 $x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
 $\therefore a=1$

5. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

- ① $A < B$
- ② $A \leq B$
- ③ $A > B$
- ④ $A \geq B$
- ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

6. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

- ① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

7. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?
- ① $M = 3, m = 0$ ② $M = 3, m = -3$
③ $M = 6, m = 0$ ④ $M = 6, m = -6$
⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$
 $\therefore M = 6, m = -6$

8. 자연수 전체의 집합 N 에 대하여 함수 $f : N \rightarrow N$ 을 $f(n) = (n\text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의한다. 이 때, 집합 $A = \{n | f(n) = 2\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in A$

② $2 \in A$

③ $4 \in A$

④ $6 \in A$

⑤ $10 \in A$

해설

$f(n) = 2$ 란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

9. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$$y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$x = y^2 - 4y + 4 + 1$$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ($x \geq 2$) 이므로

$$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

10. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

- ① 8 개 ② 9 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

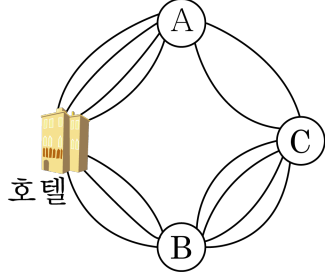
두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

$$216 = 2^3 \times 3^3,$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ 에서 G.C.D.는 } 2^3 \times 3^2$$

$$\text{따라서 공약수의 개수는 } (3 + 1)(2 + 1) = 12$$

11. 영우는 호텔에서 출발하여 3 개의 관광지 A, B, C 를 관광한 뒤 다시 호텔로 돌아오려고 한다. 호텔과 관광지간의 도로가 오른쪽 그림과 같을 때 호텔을 출발하여 모든 관광지를 한 번씩만 거치고, 호텔로 다시 돌아오는 방법의 수는?



- ① 144 ② 152 ③ 176 ④ 184 ⑤ 192

해설

(호텔 $\rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow$ 호텔)로
가는 길의 가지수: $4 \times 2 \times 4 \times 3 = 96$
(호텔 $\rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow$ 호텔)로
가는 길의 가지수: $3 \times 4 \times 2 \times 4 = 96$
 $\therefore 96 + 96 = 192$

12. 남학생 4 명, 여학생 3 명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 특정인 2 명이 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

① 7!

② $7! \times 2!$

③ $6! \times 2!$

④ 6!

⑤ $5! \times 2!$

해설

특정인 2 명을 한 묶음으로 생각하여 6 명을 일렬로 세우는 방법의 수가 6!,
묶음 안에서 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 2!이므로, 구하는 경우의 수는 $6! \times 2!$ (가지)

13. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 빨강을 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 20가지

해설

${}_6C_3 = 20$

14. 실수 x 에 대하여 다음 명제가 참일 때, a 의 최솟값을 구하여라.

$x > a$ 이면 $|x - 2| > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 ‘ $|x - 2| \leq 4$ 이면 $x \leq a$ 이다.’ 가 참이다.
 $|x - 2| \leq 4$ 에서
 $-4 \leq x - 2 \leq 4, -2 \leq x \leq 6$ 이므로
 $\therefore a \geq 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

15. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
 q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
 q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
 r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
 $s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
 그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
 $\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

16. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ 이므로
 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
 $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
 $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
 $= 2(|ab| - ab)$
그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \geq 0$
 $\therefore |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$
따라서 $|a+b| \leq |a|+|b|$
여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
즉, $ab \geq 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① $|ab| \geq ab, a = b$ ② $|ab| \geq ab, |ab| = ab$
- ③ $|ab| \leq ab, |ab| = ab$ ④ $|ab| = ab, a = 0$
- ⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \geq ab$ ($\because |ab|$ 는 항상 양수)
(나) : $2(|ab| - ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

17. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 에서 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y 에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

18. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x-1) = x+2$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$2x-1=3$ 으로 놓으면 $x=2$
 $\therefore f(3)=4$

19. 함수 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$)

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f^2(-1) = 2, \quad f^3(-1) = -1, \quad f^4(-1) = \frac{1}{2} \quad \dots$$

주기가 3 으로 반복되므로

$$f^{101} = (f^3)^{33} \circ f^2 = f^2 = 2$$

20. 두 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $2x - \frac{1}{2}$

④ $2x + 1$

⑤ $2x + 2$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = 2x - 1 + 2 = 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = y \text{ 라 하면 } y = 2x + 1 \text{ 에서 } x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

21. $6 \cdot {}_n C_2 = 5 \cdot {}_{n+1} C_2$ 를 만족하는 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 11$

해설

$6 \cdot {}_n C_2 = 5 \cdot {}_{n+1} C_2$ 에서

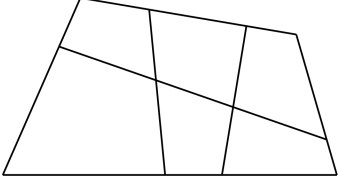
$$6 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} = 5 \cdot \frac{(n+1)n}{2!}$$

$$6n^2 - 6n - 5n^2 - 5n = 0$$

$$n^2 - 11n = 0, \quad n(n-11) = 0$$

$$\therefore n = 11 (\because n \geq 2)$$

22. 아래 그림과 같이 가로로 3개의 선분과 세로로 4개의 선분이 만나고 있다. 만들 수 있는 사각형의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 18 개

해설

3개의 가로선 중 2개를 택하고, 4개의 세로선 중 2개를 택하면 사각형이 결정된다.
따라서 구하는 사각형의 개수는

${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$

23. 서로 다른 15 종류의 꽃이 있다. 5개씩 세 사람에게 나누어 주는 방법은 몇 가지인가?
- ① ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5$
 - ② ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!}$
 - ③ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times 3!$
 - ④ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3!$
 - ⑤ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5$

해설

5개씩 3 뭉치로 나누고 다시 세 사람에게 나누어 주므로

$${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 756756 \text{ (가지)}$$

24. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \leq a \leq 1$
 ④ $-1 \leq a \leq 1$ ⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,
 $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여
 q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
 각각의 진리집합을 P, Q 라 하면 $Q \subset P$
 이다.

$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
 반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는

$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

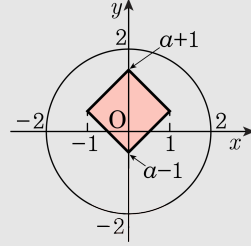
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$ 이라면 다음 그림에서

$a + 1 \leq 2, a - 1 \geq -2$

$\therefore -1 \leq a \leq 1$



25. $a : b = c : d$ 일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b + 2d \neq 0$, $a - 2b \neq 0$, $c - 3d \neq 0$ 이다.)

보기

$\textcircled{\text{㉠}} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\textcircled{\text{㉡}} \quad \frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d}$

$\textcircled{\text{㉢}} \quad \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{c+3d}{c-3d}$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\textcircled{\text{㉠}} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \cdots \text{참}$

$\textcircled{\text{㉡}} \quad \frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$
 $2ad = 2bc, ad = bc \cdots \text{참}$

$\textcircled{\text{㉢}} \quad (a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$
 $4bc = 6ad \cdots \text{거짓}$